От автора

Предлагаемое пособие представляет собой переработанное и дополненное в соответствии с требованиями ФГОС издание подробных поурочных планов по геометрии для 8 класса, ориентированное прежде всего на работу с учебным комплектом:

- *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др.* Геометрия. 7–9 классы. Учебник для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение.
- *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др.* Геометрия. 8 класс. Рабочая тетрадь. М.: Просвещение.

Перед автором была поставлена задача – максимально обеспечить подготовку учителя к уроку и организацию работы на уроке.

В данной книге учитель сможет найти подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ, тестовые задания, дополнительные задачи по каждой теме, задачи повышенной сложности. Практически все задачи, проверочные работы сопровождаются указаниями для обучающихся, ответами и краткими или подробными решениями для экономии времени учителя при подготовке к уроку, для эффективной работы над ошибками, организации дифференцированной работы.

Уроки включают различные виды деятельности обучающихся: практическую работу, работу в парах и группах, самостоятельную работу с использованием различных форм проверки.

Планирование предусматривает достижение не только предметных результатов, но и личностных (формирование представлений о математике как о части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие логического и критического мышления, умения работать в группе, команде; уважение мнения товарищей) и метапредметных (умения анализировать и осмысливать текст задачи, извлекать из текста необходимую информацию, моделировать с помощью схем, рисунков, реальных предметов, строить логическую цепочку, оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль, доказывать и опровергать утверждения с помощью контрпримеров, классифицировать, исследовать простейшие закономерности).

Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю, который сможет позаимствовать полностью предлагаемые сценарии уроков, а также опытному педагогу для использования их частично, встраивая в собственный план урока.

Для удобства работы предлагается почасовое тематическое планирование учебного материала в соответствии с данным пособием, а также в начале каждой главы курса дается выписка из тематического планирования учебного материала программы для общеобразовательных школ.

Поурочные разработки в своей основе ориентированы на организацию работы класса по технологии дифференцированного обучения. Каждый урок начинается с организационного момента, сообщения темы и целей урока. Практически в каждом сценарии урока присутствуют задачи на готовых чертежах. Наличие уже готовых рисунков поможет учителю наиболее рационально использовать рабочее время на уроке. Эти задачи решаются, как правило, устно, но по мере необходимости можно порекомендовать учащимся записать краткое решение задачи. Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях.

В пособии достаточно дополнительных задач для организации работы с одаренными учащимися, которые также можно использовать в качестве задач для организации внеурочной деятельности по предмету.

Контрольные и самостоятельные работы даны в трех уровнях сложности, что позволяет осуществить дифференцированный контроль. Первый уровень соответствует обязательным программным требованиям, второй – среднему уровню сложности, задания третьего уровня предназначены для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах и школах повышенного уровня. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта. Практически все самостоятельные и контрольные работы сопровождаются решениями, указаниями для учащихся или ответами для эффективной организации работы над ошибками.

В целях экономии времени при проверке знаний обучающихся возможно использование тестовых работ из издания:

- Контрольно-измерительные материалы. Геометрия. 8 класс / Сост. Н.Ф. Гаврилова. М.: ВАКО, 2016.

Все поурочные разработки, содержащиеся в данном пособии, являются примерными. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития как целого класса, так и конкретных учащихся, учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в саму структуру урока, включая подбор заданий для организации классной, самостоятельной и домашней работы.

Примечание: знаком * в самостоятельных и контрольных работах обозначены задания повышенного уровня сложности.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока
1, 2	Вводное повторение
	Глава V. Четырехугольники (14 ч)
3	Многоугольники
4	Решение задач по теме «Многоугольники»
5	Параллелограмм
6	Признаки параллелограмма
7	Решение задач по теме «Параллелограмм»
8	Трапеция
9	Теорема Фалеса
10	Решение задач на построение
11	Прямоугольник
12	Ромб. Квадрат
13	Решение задач по теме «Прямоугольник. Ромб. Квадрат»
14	Осевая и центральная симметрии
15	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
16	Контрольная работа № 1 по теме «Четырехугольники»
	Глава VI. Площадь (14 ч)
17	Площадь многоугольника
18	Площадь прямоугольника

№ урока	Тема урока
19	Площадь параллелограмма
20, 21	Площадь треугольника
22	Площадь трапеции
23, 24	Решение задач на вычисление площади
25	Теорема Пифагора
26	Теорема, обратная теореме Пифагора
27	Решение задач по теме «Теорема Пифагора»
28, 29	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
30	Контрольная работа № 2 по теме «Площадь»
Глава VII. Подобные треугольники (20 ч)	
31	Определение подобных треугольников
32	Отношение площадей подобных треугольников
33	Первый признак подобия треугольников
34	Решение задач на применение первого признака подобия треугольников
35	Второй и третий признаки подобия треугольников
36, 37	Решение задач на применение признаков подобия треугольников
38	Контрольная работа № 3 по теме «Признаки подобия треугольников»
39	Средняя линия треугольника
40	Средняя линия треугольника. Свойство медиан треугольника
41	Пропорциональные отрезки
42	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике
43	Измерительные работы на местности
44	Решение задач на построение методом подобия
45	Решение задач на построение методом подобных треугольников
46	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника
47	Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°
48	Решение задач по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»
49	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
50	Контрольная работа № 4 по теме «Применение теории подобия к решению задач. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

№ урока	Тема урока
Глава VIII. Окружность (16 ч)	
51	Взаимное расположение прямой и окружности
52	Касательная к окружности
53	Решение задач по теме «Касательная к окружности»
54	Градусная мера дуги окружности
55	Теорема о вписанном угле
56	Теорема об отрезках пересекающихся хорд
57	Решение задач по теме «Центральные и вписанные углы»
58	Свойство биссектрисы угла
59	Серединный перпендикуляр
60	Теорема о точке пересечения высот треугольника
61	Вписанная окружность
62	Свойство описанного четырехугольника
63	Описанная окружность
64	Свойство вписанного четырехугольника
65	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
66	Контрольная работа № 5 по теме «Окружность»
Повторение (2 ч)	
67	Повторение по темам «Четырехугольники», «Площадь»
68	Повторение по темам «Подобные треугольники», «Окружность»
69	Контрольная работа № 6 (итоговая)
70	Учебно-исследовательская конференция

ВВОДНОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Формируемые УУД: *предметные:* повторить наиболее важные теоретические сведения из курса геометрии 7 класса: признаки равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства прямоугольных треугольников, признаки и свойства параллельных прямых; повторить умение решать задачи на использование основных тем курса геометрии 7 класса; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал, уметь извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; уметь доказывать и опровергать утверждения, используя известные из курса геометрии 7 класса геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры; понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

Урок 1. Вводное повторение

Основные дидактические цели урока: повторить соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства прямоугольных треугольников, признаки и свойства параллельных прямых; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

В 7 классе вы первый год изучали геометрию. Назовите наиболее важные темы, с которыми вы познакомились.

II. Повторение теоретического материала

1. Самостоятельное повторение теоретического материала (работа в парах).

1) В треугольнике KME $\angle E = \angle K = \angle M$. Напишите все известные вам соотношения между:

а) сторонами треугольника;

б) углами треугольника;

в) сторонами и углами треугольника.

2) Для прямоугольного треугольника PEK напишите все его свойства.

3) Для равнобедренного треугольника MNK с основанием MK напишите все его свойства.

4) Какие элементы треугольника (медианы, высоты, биссектрисы) лежат внутри, а какие вне треугольника?

5) Выберите верные утверждения:

а) в треугольнике ABC $\angle C$ – прямой, $\angle A = 110°$;

б) сумма двух углов треугольника равна 69°;

в) в равнобедренном треугольнике угол при основании равен 95°;

г) в треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, а внешний угол при вершине C равен 105°;

д) стороны треугольника равны 5 см, 8 см, 15 см;

е) медиана треугольника равна его высоте;

ж) в прямоугольном треугольнике MNK ($\angle K = 90°$) $\angle M = 30°$, $NK = 5$ см, $MN = 9$ см;

з) в треугольнике PES высоты EE_1 и SS_1 пересекаются в точке H_1, а высоты EE_1 и PP_1 – в точке H_3.

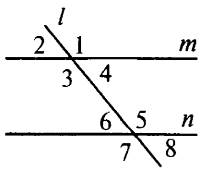


Рис. 1

6) *Дано:* $m \parallel n$, l – секущая, $\angle 1 = 130°$ (рис. 1).

Найти: $\angle 2 - \angle 8$.

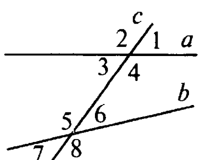


Рис. 2

7) Определите, в каком случае прямые a и b параллельны (рис. 2):

а) $\angle 1 = 88°$, $\angle 6 = 92°$;

б) $\angle 2 = 103°$, $\angle 3 = 77°$;

в) $\angle 3 = 75°$, $\angle 5 = 105°$;

г) $\angle 8 = 110°$, $\angle 4 = 110°$;

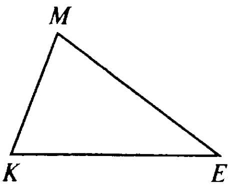


Рис. 3

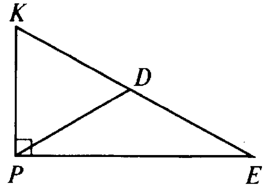


Рис. 4

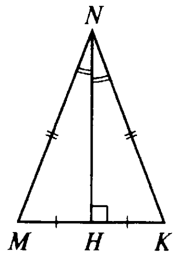


Рис. 5

д) $\angle 7 = 81°$, $\angle 3 = 89°$;

е) $\angle 4 = 95°$, $\angle 5 = 95°$.

8) Можно ли доказать аксиому параллельности прямых?

2. Обсуждение ответов самостоятельной теоретической работы. (Одна из пар отвечает на вопрос, затем идет обсуждение.)

1) Рис. 3.

а) $KM < ME + KE$; $ME < KM + KE$; $KE < MK + ME$.

б) $\angle K + \angle M + \angle E = 180°$.

в) если $\angle E < \angle K < \angle M$, тогда $KM < ME < KE$.

2) Рис. 4.

а) Если $\angle P = 90°$, то $\angle E + \angle K = 90°$.

б) Если $\angle E = 30°$, то $PK = \dfrac{KE}{2}$.

в) Если PD – медиана, то $PD = KD = DE$.

3) Рис. 5.

а) $MN = NK$, $\angle M = \angle K$.

б) NH – высота, биссектриса, медиана.

4) Внутри треугольника лежат медианы и биссектрисы всех треугольников и высоты остроугольных треугольников. Две высоты тупоугольных треугольников лежат вне треугольника, а две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами.

5) Верны утверждения б), г).

6) $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 50°$; $\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 130°$.

7) Прямые a и b параллельны в случаях в), г), е).

8) Аксиома – основное положение геометрии, которое принимается в качестве исходного, т. е. принимается без доказательства.

III. Решение задач по готовым чертежам

(Учащиеся решают задачи самостоятельно. В тетрадях по необходимости выполняют рисунок и вносят туда результаты промежуточных вычислений. К простым задачам записывают только ответы. Учитель контролирует работу менее подготовленных

учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

1. Рис. 6.
Найти: $\angle AOC$, $\angle AOD$.
2. Рис. 7.
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 238°$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.
3. Рис. 8.
Найти: $\angle DBC$, $\angle ABF$, $\angle DBF$.
4. *Дано:* $\angle AOD = 120°$, $CO \perp AO$ (рис. 9).
Найти: $\angle BOD$.
5. *Дано:* $\angle NMO : \angle LMN = 2 : 7$ (рис. 10).
Найти: $\angle LMR$, $\angle RMO$.
6. *Дано:* $a \parallel b$ (рис. 11).
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.
7. *Дано:* $\angle 2 - \angle 1 = 80°$, $a \parallel b$ (рис. 12).
Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.
8. Рис. 13.
Найти: $\angle BDE$, $\angle BDC$, $\angle EDK$.
9. Рис. 14.
Найти: $\angle BCD$.

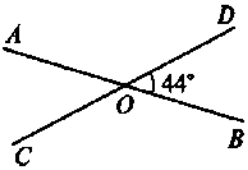


Рис. 6

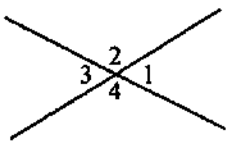


Рис. 7

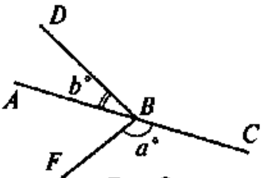


Рис. 8

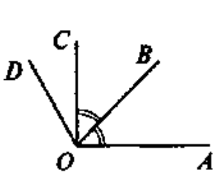


Рис. 9

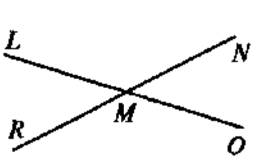


Рис. 10

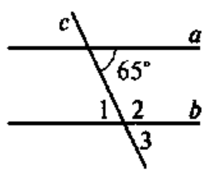


Рис. 11

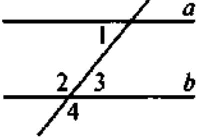


Рис. 12

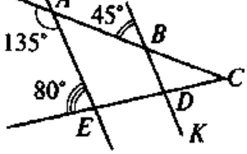


Рис. 13

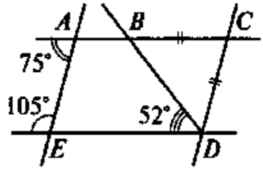


Рис. 14

10. *Дано:* BE – биссектриса $\angle ABC$ (рис. 15).
Найти: $\angle BED$.

11. *Дано:* $AD \parallel BE$; AC и BC – биссектрисы $\angle BAD$ и $\angle ABE$ (рис. 16).
Найти: $\angle ACB$.

12. *Дано:* AC – биссектриса $\angle BAE$; $\angle CDE : \angle AED = 7 : 8$ (рис. 17).
Найти: $\angle DEF$.

13. *Дано:* $\angle B$ на 20° больше $\angle C$ (рис. 18).
Найти: $\angle B$, $\angle C$.

14. *Дано:* $\angle A$ в 3 раза меньше $\angle B$ (рис. 19).
Найти: $\angle A$, $\angle B$.

15. Рис. 20.
Найти: $\angle BCD$.

16. Рис. 21.
Найти: $\angle ABC$.

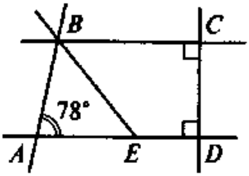


Рис. 15

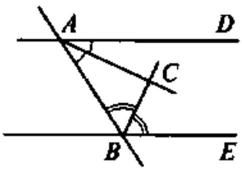


Рис. 16

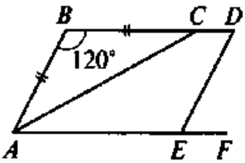


Рис. 17

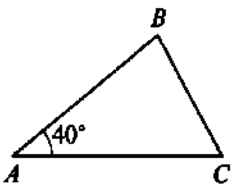


Рис. 18

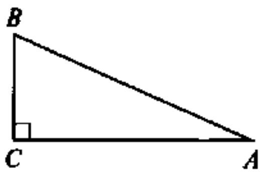


Рис. 19

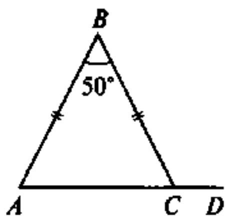


Рис. 20

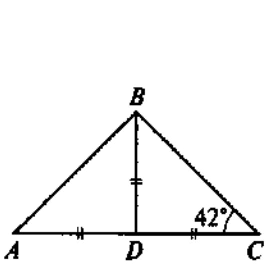


Рис. 21

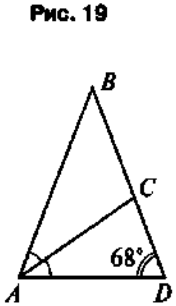


Рис. 22

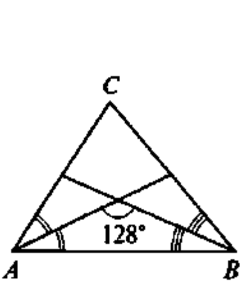


Рис. 23

17. *Дано:* $AB = BD$ (рис. 22).
Найти: $\angle ACB$.
18. Рис. 23.
Найти: $\angle ACB$.
19. Рис. 24.
Сравнить: $\angle 1$ и $\angle 2$.
20. Рис. 25.
Сравнить: $\angle ABC$ и $\angle ADC$.
21. Рис. 26.
Найти: $\alpha + \beta + \gamma$.
22. Рис. 27.
Найти: $\angle C$.
23. Рис. 28.
Найти: $\angle CDE$.
24. *Дано:* $AD \parallel CE$ (рис. 29).
Найти: $\angle ABC$.
25. Рис. 30.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.
26. Рис. 31.
Найти: AB.
27. Рис. 32.
Найти: MK.

28. Между какими целыми числами заключена длина отрезка AC (рис. 33)?

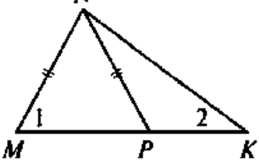


Рис. 24

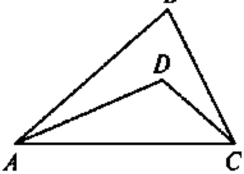


Рис. 25

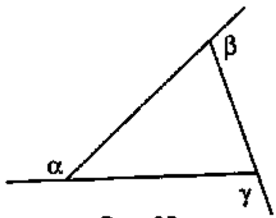


Рис. 26

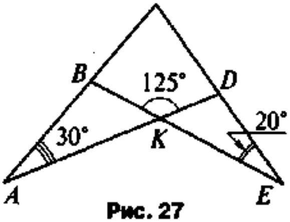


Рис. 27

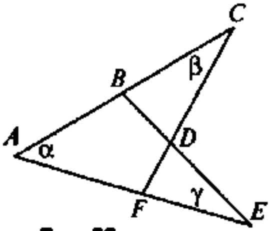


Рис. 28

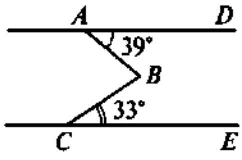


Рис. 29

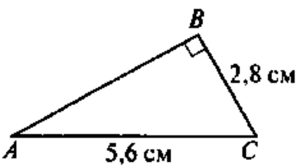


Рис. 30

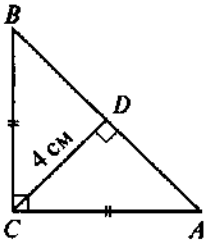


Рис. 31

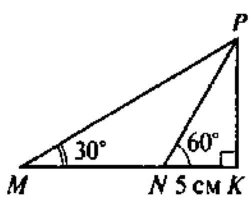


Рис. 32

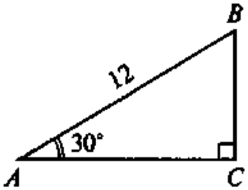


Рис. 33

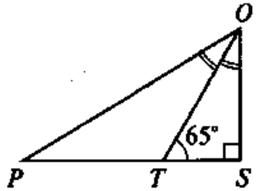


Рис. 34

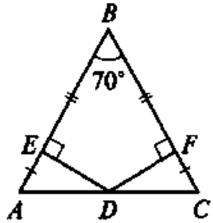


Рис. 35

29. Рис. 34.
Найти: $\angle OPS$.
30. Рис. 35.
Найти: $\angle EDF$.
(Рекомендуется дифференцированная работа.)
I уровень сложности: задачи 1–8, 13–17, 25–27.
II уровень сложности: задачи 3–5, 7–12, 18–24, 27–30.
(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)
Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решено не менее 12 задач;
- оценка «4» – правильно решены 9–11 задач;
- оценка «3» – правильно решены 6–8 задач;
- оценка «2» – не ставится.

Варианты краткого оформления задач:
Задача № 1
Первый вариант: $\angle AOC = 44°$, $\angle AOD = 136°$.
Второй вариант: рис. 36.
Задача № 9
$75° + 105° = 180° \Rightarrow AC \parallel ED$ (рис. 37).
Ответы к задачам:
1. $\angle AOC = 44°$, $\angle AOD = 136°$.
2. $\angle 1 = 58°$, $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 58°$.
3. $\angle DBC = 180° - b°$, $\angle ABF = 180° - a°$, $\angle DBF = 180° - a° + b°$.
4. $\angle BOD = 75°$.

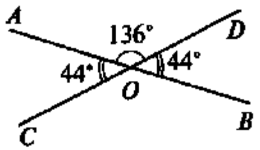


Рис. 36

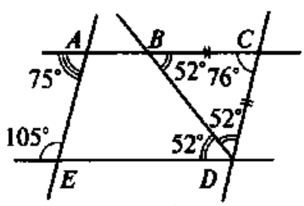


Рис. 37

5. $\angle LMR = 40°$, $\angle RMO = 140°$.
6. $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 115°$, $\angle 3 = 65°$.
7. $\angle 3 = 50°$, $\angle 4 = 130°$.
8. $\angle BDE = 80°$, $\angle BDC = 100°$, $\angle EDK = 100°$.
9. $\angle BCD = 76°$.
10. $\angle BED = 129°$.
11. $\angle ACB = 90°$.
12. $\angle DEF = 84°$.
13. $\angle B = 80°$, $\angle C = 60°$.
14. $\angle A = 22°30'$, $\angle B = 67°30'$.
15. $\angle BCD = 115°$.
16. $\angle ABC = 90°$.
17. $\angle ACB = 102°$.
18. $\angle ACB = 76°$.
19. $\angle 1 > \angle 2$.
20. $\angle ABC < \angle ADC$.
21. $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.
22. $\angle C = 75°$.
23. $\angle CDE = \alpha + \beta + \gamma$.
24. $\angle ABC = 72°$.
25. $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$.
26. $AB = 8$ см.
27. $MK = 15$ см.
28. $6 < AC < 12$.
29. $\angle OPS = 40°$.
30. $\angle EDF = 110°$.

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой треугольник называется равнобедренным? Сформулируйте свойства равнобедренных треугольников.
2. Какой треугольник называется прямоугольным? Сформулируйте свойства прямоугольных треугольников.
3. Сформулируйте признаки и свойства параллельных прямых.

Домашнее задание

1. Повторить признаки равенства треугольников (глава II, § 1, 3), признаки равенства прямоугольных треугольников (глава IV, п. 35), задачи на построение (глава II, п. 22, 23; глава III, п. 26).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 4, 8, 17, 27; II уровень сложности: № 10, 18, 19, 23.

Урок 2. Вводное повторение

Основные дидактические цели урока: повторить признаки равенства треугольников, признаки равенства прямоугольных треугольников, задачи на построение; совершенствовать навыки решения задач на доказательство, на построение циркулем и линейкой.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Повторение простейших задач на построение.

(Четыре ученика готовят у доски решение задач на построение.)

1) На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному, и построить середину этого отрезка.

2) Отложить от данного луча угол, равный данному, и построить его биссектрису.

3) Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка.

4) Построить прямую, проходящую через данную точку, не лежащую на данной прямой, перпендикулярно этой прямой.

2. Самостоятельная теоретическая работа.

(Подготовка учащихся у доски и самостоятельная работа выполняются параллельно.)

Используя п. 3 Приложения (см. с. 403), выполните задания.

1) $\Delta ABC = \Delta MNK$, $AB = 7{,}3$ см, $BC = 2{,}6$ см, $MK = 5{,}4$ см. $\angle B = 45°$, $\angle M = 35°$, $\angle K = 100°$. Найдите неизвестные стороны и углы треугольников.

2) Для доказательства равенства треугольников POS и QRT (рис. 38) достаточно доказать, что:

а) $\angle P = \angle Q$;

б) $\angle O = \angle R$;

в) $\angle S = \angle T$.

3) $\Delta ABC = \Delta MNK$ (рис. 39), если:

а) $BC = NK$;

б) $\angle B = \angle N$;

в) $\angle S = \angle K$.

4) $\Delta DEF = \Delta RPQ$ (рис. 40), если:

а) $\angle F = \angle Q$;

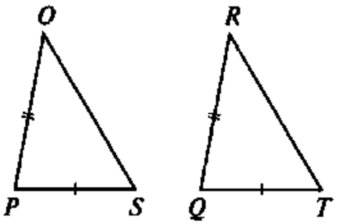


Рис. 38

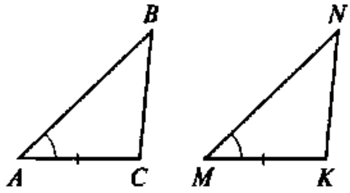


Рис. 39

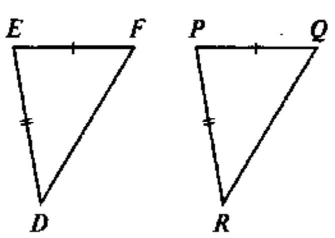


Рис. 40

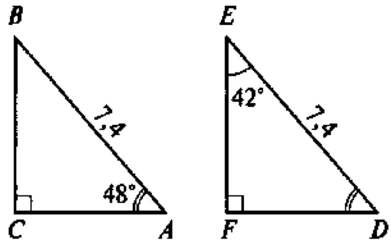


Рис. 41

б) $DF = RQ$;

в) $\angle D = \angle R$.

5) Равны ли ΔABC и ΔDEF (рис. 41)?

6) Построить треугольники MNK и RQS, у которых: $\angle N = \angle Q = 90°$, $MN = RQ = 4$ см, $NK = QS = 3$ см. Равны ли ΔMNK и ΔRQS?

7) Для доказательства равенства ΔABC и ΔMKN (рис. 42) достаточно доказать, что:

а) $\angle A = \angle M$;

б) $\angle C = \angle N$;

в) нет правильного ответа.

8) Равны ли ΔRPQ и ΔDEF (рис. 43)?

3. Взаимопроверка ответов самостоятельной теоретической работы.

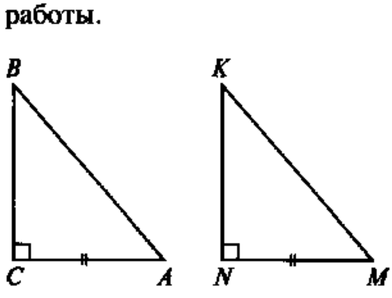


Рис. 42

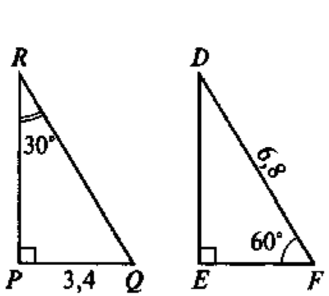


Рис. 43

(Учащиеся обмениваются тетрадями и проверяют работу своего соседа по парте. Правильные ответы называет один из учащихся или проверка осуществляется по ответам, заранее подготовленным на интерактивной доске.)

Ответы к самостоятельной теоретической работе:

1) $MN = 7{,}3$ см, $NK = 2{,}6$ см, $AC = 5{,}4$ см, $\angle N = 45°$, $\angle A = 35°$, $\angle C = 100°$.

2) а) $\angle P = \angle Q$ – первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

3) в) $\angle C = \angle K$ – второй признак равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).

4) б) $DF = RQ$ – третий признак равенства треугольников (по трем сторонам).

5) $\Delta ABC = \Delta DEF$ по гипотенузе и острому углу.

6) $\Delta MNK = \Delta RQS$ по двум катетам.

7) а) $\angle A = \angle M$ ($\Delta ABC = \Delta MKN$ по катету и прилежащему к нему острому углу).

8) $\Delta RPQ = \Delta DEF$ по гипотенузе и катету, или по гипотенузе и острому углу, или по катету и прилежащему к нему острому углу.

4. Работа у доски.

(Заслушать учащихся, работавших у доски.)

5. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы по 4 человека. Каждая группа получает одну из задач. На обсуждение дается 2–3 мин. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Задание. Составьте план решения задачи на построение треугольника по трем элементам.

(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

1. Рис. 44.

Построить треугольник по двум сторонам, равным MN и PQ, и углу между ними (hk).

– Всегда ли задача имеет решение?

2. Рис. 45.

Построить треугольник по стороне, равной AB, и прилежащим к ней углам, равным (hk) и (mn).

– Всегда ли задача имеет решение?

3. Рис. 46.

Построить треугольник по трем сторонам, равным MN, PQ и RS.

– Всегда ли задача имеет решение?

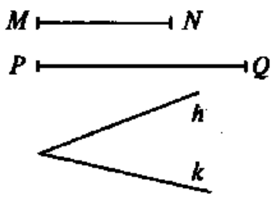


Рис. 44

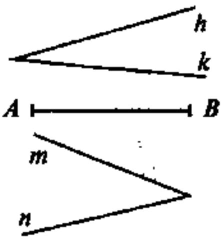


Рис. 45

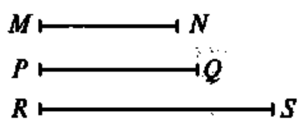


Рис. 46

III. Решение задач

(Наиболее подготовленные учащиеся работают индивидуально, остальные – в равноценных парах. В конце урока учащиеся сдают тетради на проверку.)

Задание. Укажите равные треугольники, изображенные на рисунке; запишите признак равенства треугольников, с помощью которого доказывается их равенство, с указанием пар равных элементов.

1. Рис. 47.
2. Рис. 48.
3. Рис. 49.
4. Рис. 50.
5. Рис. 51.
6. Рис. 52.

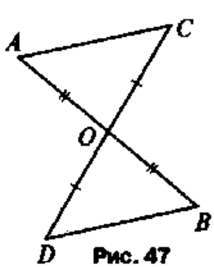


Рис. 47

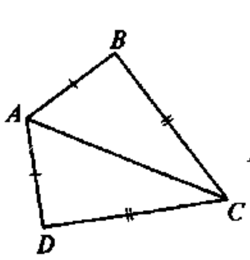


Рис. 48

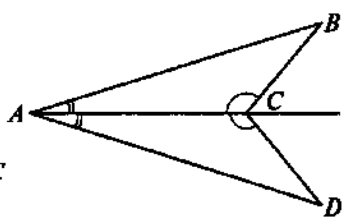


Рис. 49

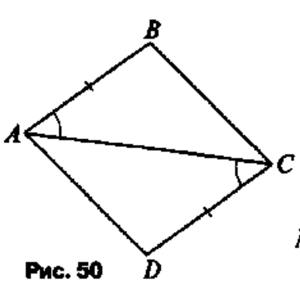


Рис. 50

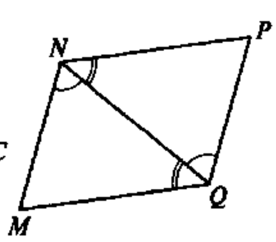


Рис. 51

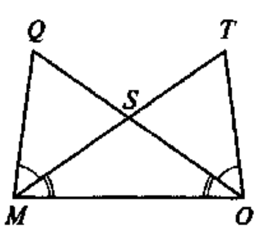


Рис. 52

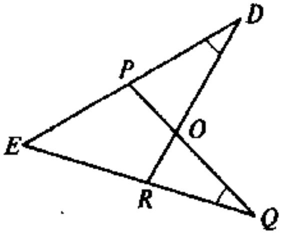


Рис. 53

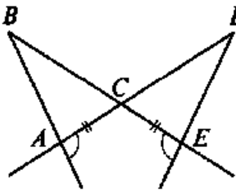


Рис. 54

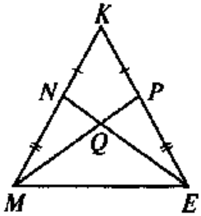


Рис. 55

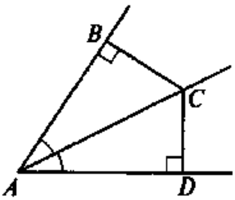


Рис. 56

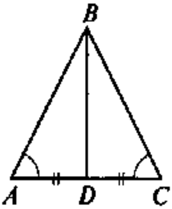


Рис. 57

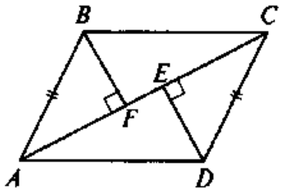


Рис. 58

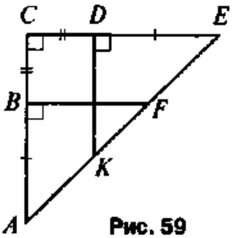


Рис. 59

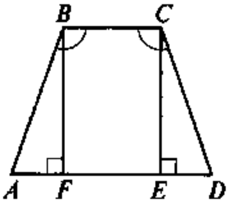


Рис. 60

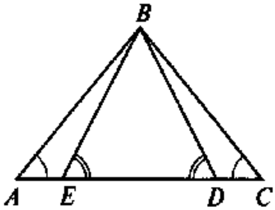


Рис. 61

7. *Дано:* $DE = QE$ (рис. 53).
8. Рис. 54.
9. Рис. 55.
10. Рис. 56.
11. Рис. 57.
12. *Дано:* $AB \parallel CD$ (рис. 58).
13. Рис. 59.
14. *Дано:* $BC \parallel AD$ (рис. 60).
15. Рис. 61.

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте признаки равенства треугольников.
2. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.
3. Какие основные задачи на построение нам известны?

Домашнее задание

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

Решить задачи.

I уровень сложности:

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите другие углы данного треугольника.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, причем $AD = DC$, угол C равен 20°. Найдите углы треугольников ABC и ADC.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 60 см. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

4. В треугольнике высота BH делит сторону AM пополам и равна 5 см; периметр треугольника ABH равен 15 см. Найдите периметр треугольника ABM.

II уровень сложности:

1. Биссектрисы прямого угла и одного из острых углов треугольника образуют угол 105°. Найдите гипотенузу треугольника, если его меньший катет равен 2 см.

2. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK угла BAC и биссектриса KM угла AKB, угол A равен 60°, угол C равен 50°. Найдите углы треугольника BMK.

3. В треугольнике ABC $AB : BC = 2 : 3$, BH – высота, $\angle C = 30°$. Найдите $AB + BC$, если $BH = 6$ см.

4. Даны две параллельные прямые m и b и секущая k. Биссектриса одного из внутренних углов, образованных прямыми k и m, составляет с прямой m угол в 94°. Найдите все углы, образованные прямыми m и b и секущей k.

Глава V
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Формируемые УУД: *предметные:* иметь понятие о многоугольниках и выпуклых многоугольниках; знать определения параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции; их свойства и признаки; научить обучающихся решать задачи на использование определений основных четырехугольников, их свойств и признаков; иметь понятия осевой и центральной симметрии; сформировать представления о фигурах, симметричных относительно точки или прямой; научить строить фигуры, симметричные данным относительно данной точки и данной прямой; продолжить решение задач на построение с помощью циркуля и линейки; научить решать задачи на построение, используя анализ, доказательство и исследование; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал, уметь извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; уметь доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры; понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

Урок 3. Многоугольники

Основные дидактические цели урока: ввести понятия многоугольника, выпуклого многоугольника, рассмотреть четырехугольник как частный вид многоугольника; вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и суммы углов четырехугольника; решить задачи по теме урока.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

II. Проверка домашнего задания

(По готовым указаниям и ответам к домашним задачам учащиеся исправляют допущенные ошибки. Ответы и указания учитель готовит на доске заранее или раздает на каждую парту в распечатанном виде.)

Ответы и указания к домашним задачам:

I уровень сложности

1. $\angle A = \angle C = 40°$ (рис. 5.1).

2. $AD = DC$ (рис. 5.2), тогда $\angle 1 = \angle C = 20°$. $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 120°$, $\angle ACB = 20°$. $\angle DAC = \angle ACD = 20°$, $\angle ADC = 140°$.

3. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (рис. 5.3). $CM = 30$ см.

4. $\Delta ABH = \Delta MBH$ по двум катетам (рис. 5.4), тогда $AB = MB$. $P_{\text{ABH}} = 15$ см, тогда $AB + AH = 10$ см, значит, $P_{\text{ABM}} = 20$ см.

II уровень сложности

1. CB – меньший катет ($\angle A < \angle B < \angle C$) (рис. 5.5). $CB = 2$ см, тогда $AB = 4$ см.

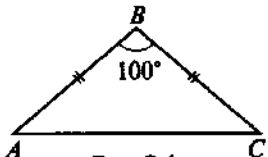


Рис. 5.1

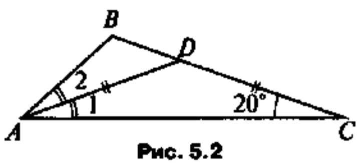


Рис. 5.2

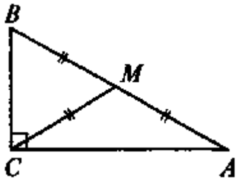


Рис. 5.3

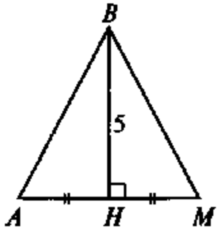


Рис. 5.4

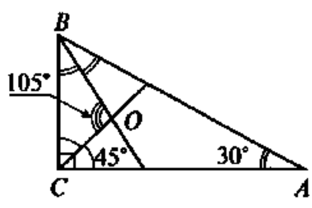


Рис. 5.5

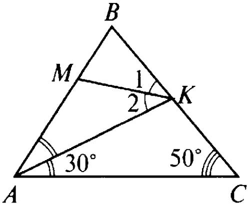


Рис. 5.6

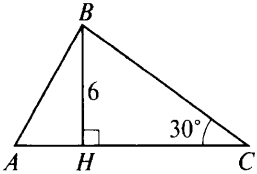


Рис. 5.7

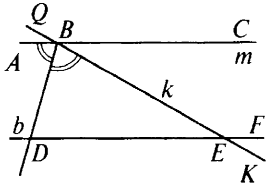


Рис. 5.8

2. $\angle B = 70°$ (рис. 5.6). $\angle 1 = \angle 2 = (180° - (70° + 30°)) : 2 = 40°$. $\angle BMK = 180° - (70° + 40°) = 70°$.

3. $BC = 12$ см (рис. 5.7). $AB : BC = 2 : 3$, тогда $AB = 2x$, $BC = 3x$. $3x = 12$, $x = 4$ см, значит, $AB + BC = 5x = 20$ см.

4. $\angle CBD = 94°$ (рис. 5.8), тогда $\angle ABD = 86°$, $\angle DBE = 86°$, $\angle CBE = 8°$.

Ответ: $\angle ABQ = \angle FEK = \angle CBE = \angle BED = 8°$, $\angle ABE = \angle BEF = \angle DEK = \angle QBC = 172°$.

III. Постановка целей и задач на учебный год

– Назовите основные темы, которые мы изучили в 7 классе.

– Как вы думаете, какие темы мы будем изучать в 8 классе?

(Учитель перечисляет основные темы.)

- Четырехугольники.
- Площадь.
- Подобные треугольники.
- Окружность.

К концу учебного года каждому ученику необходимо подготовить проектную работу. Для выбора темы проекта определите направление деятельности:

- решение задач повышенного уровня сложности по теме «...» (тему учащийся выбирает самостоятельно);
- изучение дополнительного теоретического материала (рекомендуется использовать пособие Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова «Геометрия. 8 класс. Дополнительные главы к учебнику»);
- из истории геометрии и др.

Проект нужно оформить в печатном виде и подготовить его презентацию. Лучшие работы будут рекомендованы для участия в школьной научно-практической конференции.

IV. Работа по теме урока

(При изучении нового материала желательно опираться на имеющиеся у учащихся знания по данной теме.)

1. Решите задачи.

1) Какая фигура называется многоугольником? Начертите в тетрадях многоугольник, укажите его стороны, вершины и диагонали.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Возможный вариант рисунка и записей в тетрадях учащихся:

ABCDEFK – многоугольник (семиугольник) (рис. 5.9); *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FK*, *KA* – стороны многоугольника; *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *K* – вершины многоугольника; *A*, *B* – соседние вершины, *AC*, *AD*, *AE*, *AF* – диагонали многоугольника.

2) Является ли *ABCDEF* (рис. 5.10) многоугольником? Обоснуйте свой ответ.

Ответ: Нет, так как отрезки *CE* и *AD* пересекаются в точке *B*.

2. Ввести понятие внутренней и внешней областей многоугольника (рис. 5.11).

3. Ввести определение выпуклого многоугольника.

Определение: Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Выпуклые многоугольники: рис. 5.12.

Невыпуклый многоугольник: рис. 5.13.

4. Фронтальная работа с классом.

Среди всех фигур, изображенных на рисунке рис. 5.14, укажите те, которые являются:

а) многоугольниками;

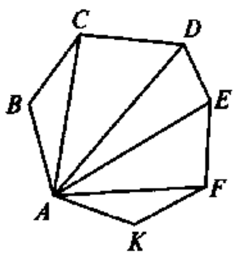


Рис. 5.9

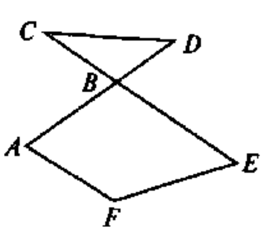


Рис. 5.10

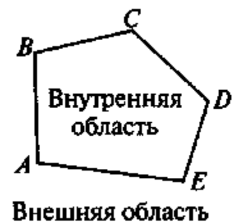


Рис. 5.11

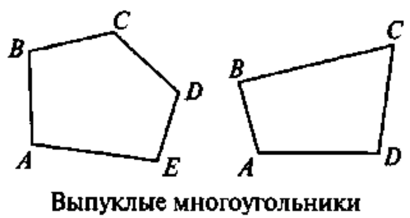


Рис. 5.12

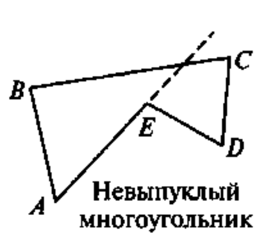


Рис. 5.13

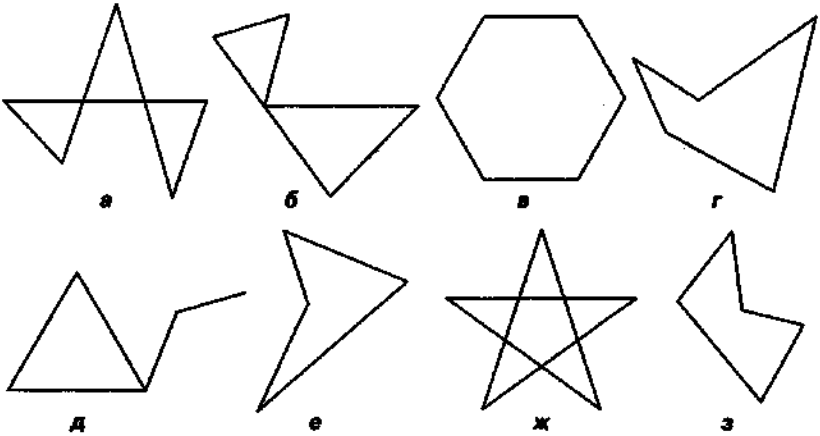


Рис. 5.14

б) выпуклыми многоугольниками;

в) невыпуклыми многоугольниками.

5. Работа в парах.

1) Начертите:

вариант 1 – выпуклый пятиугольник *ABCDE;*

вариант 2 – выпуклый шестиугольник *ABCDEF.*

2) Запишите в тетрадях:

а) вершины многоугольника;

б) стороны многоугольника;

в) диагонали многоугольника;

г) вычислите сумму углов многоугольника.

3) Обсуждение решения задачи 2 (г).

Наводящие вопросы.

– Сумму углов какой геометрической фигуры мы умеем вычислять?
– Чему равна сумма углов прямоугольника?
– Чему равна сумма углов выпуклого четырехугольника?
– Найдите сумму углов фигуры вашего варианта.

6. Работа в группах.

1) Чему равна сумма углов десятиугольника?

2) Чему равна сумма углов *n*-угольника?

(Учащиеся работают в группах по 3–4 человека в течение 3–5 мин, затем проходит обсуждение.)

Наводящие вопросы.

– Сколько треугольников получится, если провести все диагонали, выходящие из одной вершины?

– Чему равна сумма углов каждого из полученных треугольников?
– Что можно сказать о сумме углов всех треугольников?
– Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?

V. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи в рабочих тетрадях.

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение, заполняя пропуски. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

Задача № 3. Ответ: а) 5; б) 900°.

Задача № 4. Ответ: а) 1620°; б) 3600°.

2. Решить задачу № 365 (в) (самостоятельно с последующей самопроверкой).

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Решение: Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$. Следовательно, $180° \cdot (n - 2) = 120° \cdot n$. Отсюда $180° \cdot n - 360° = 120° \cdot n$, $60° \cdot n = 360°$, $n = 6$.

Ответ: 6 сторон.

Наводящие вопросы.

– Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
– Как другим способом можно вычислить сумму углов выпуклого n-угольника, если каждый из его n углов равен 120°?
– Как найти число сторон такого многоугольника?

3. Решить задачу № 364 (в) (самостоятельно).

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая фигура называется многоугольником?
2. Какой многоугольник называется выпуклым, невыпуклым?
3. Что значит внутренняя и внешняя области многоугольника?
4. Чему равна сумма углов выпуклого многоугольника?
5. Чему равна сумма углов выпуклого пятиугольника, семиугольника?

Домашнее задание

1. П. 40–42, вопросы 1–5 (учебник, с. 113).
2. Решить задачи № 364 (а, б), 365 (а, б, г), 368.
3. Решить задачи № 1, 2 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительную задачу.

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ вершина B соединена равными диагоналями с двумя другими вершинами. Известно, что $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$. Докажите, что периметры четырехугольников $ABDE$ и $BEDC$ равны.

Урок 4. Решение задач по теме «Многоугольники»

Основные дидактические цели урока: систематизировать теоретические знания по теме «Многоугольники»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Устный теоретический опрос.

(Учитель по очереди вызывает учащихся к доске. Первый ученик у доски рассказывает решение первой задачи. Учащиеся его слушают, затем исправляют ошибки. Таким же образом решить остальные задачи.)

1) Начертите две фигуры, одна из которых является многоугольником, а другая – нет. Укажите вершины, стороны данного многоугольника.

2) Начертите выпуклый и невыпуклый четырехугольники. У выпуклого четырехугольника укажите противоположные вершины и противоположные стороны. Отметьте по две точки, принадлежащие внутренней и внешней области невыпуклого четырехугольника.

3) Начертите выпуклый пятиугольник и укажите все его диагонали.

4) Что такое периметр многоугольника?

5) Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника? четырехугольника? Каков план доказательства теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника?

6) Как найти угол выпуклого n-угольника, если известно, что все его углы равны?

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения устного теоретического опроса.)

I уровень сложности

1. Найдите сумму углов выпуклого восьмиугольника.

2. В четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны параллельны, $AB = 10$ см, $BC = 14$ см. Найдите периметр $ABCD$.

II уровень сложности

1. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если сумма его улов равна 540°?

2. В выпуклом четырехугольнике длины сторон относятся как 7 : 8 : 9 : 10, а его периметр равен 68 см. Найдите стороны четырехугольника.

III уровень сложности

1. Найдите число сторон выпуклого многоутольника, если каждый угол равен 108°.

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

III. Проверка домашнего задания

Проверка решения дополнительной домашней задачи.

(Справившийся с заданием ученик записывает решение на доске. Заслушать перед решением задач.)

Решение: $\Delta ABE = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними ($BE = BD$, $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = BDC$), следовательно, $AB = BC$, $AE = CD$ (рис. 5.15).

$P_{ABDE} = AB + BD + DE + AE$, $P_{BEDC} = BE + ED + DC + BC$. Так как $AB = BC$, $BD = BE$, DE – общая сторона, $AE = DC$, то $P_{ABDE} = P_{BEDC}$.

IV. Решение задач

1. Работа в рабочей тетради (самостоятельно).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение, заполняя пропуски. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

Задача № 5. Ответ: а) $n = 8$; б) $n = 12$.

Задача № 6. Ответ: $BC = 3$ см.

2. Решить задачу № 367.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

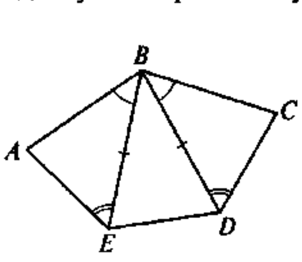


Рис. 5.15

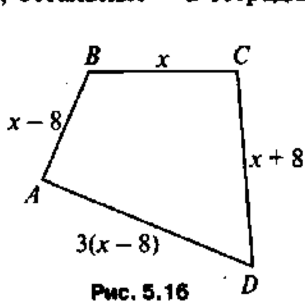


Рис. 5.16

Решение: Пусть первая сторона равна x см (рис. 5.16), тогда вторая сторона равна $(x - 8)$ см, третья сторона равна $(x + 8)$ см, а четвертая сторона равна $(3 \cdot (x - 8))$ см. Периметр – это сумма длин всех сторон, поэтому $x + (x - 8) + (x + 8) + 3 \cdot (x - 8) = 66$;

$x = 15$;

$x - 8 = 7$ см;

$x + 8 = 23$ см;

$3 \cdot (x - 8) = 21$ см.

Ответ: 15 см, 7 см, 23 см, 21 см.

3. Самостоятельная работа.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

I уровень сложности

1. Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

Ответ: 900°.

2. Найдите угол выпуклого пятиугольника, если известно, что все его углы равны.

Ответ: 108°.

3. Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если известно, что сумма его углов равна 1080°.

II уровень сложности

1. Докажите, что выпуклый четырехугольник с неравными углами должен иметь хотя бы один тупой угол.

Решение: Если в четырехугольнике все его углы равны, то каждый из них равен 90°. Если его углы не равны и при этом ни один из них не тупой, то сумма углов выпуклого четырехугольника меньше 360°, что приводит к противоречию с теоремой о сумме углов выпуклого многоугольника. Следовательно, хотя бы один угол должен быть тупым.

2. В выпуклом многоугольнике имеется пять углов с градусной мерой 140° каждый, остальные углы острые. Найдите число сторон этого многоугольника.

Ответ: $n = 6$.

V. Самостоятельная работа обучающего характера

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. Найдите сумму углов выпуклого двенадцатиугольника.

2. В выпуклом пятиугольнике две стороны равны, третья сторона на 3 см больше, а четвертая – в 2 раза больше первой стороны, пятая – на 4 см меньше четвертой. Найдите стороны пятиугольника, если известно, что его периметр равен 34 см.

Вариант 2

1. Найдите сумму углов выпуклого тринадцатиугольника.

2. В выпуклом шестиугольнике три стороны равны, четвертая – в 2 раза больше первой стороны, пятая – на 3 см меньше четвертой, а шестая – на 1 см больше второй. Найдите стороны шестиугольника, если известно, что его периметр равен 30 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 2160°?

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

Вариант 2

1. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 2520°?

2. Диагональ AC невыпуклого четырехугольника $ABCD$ разделяет этот четырехугольник на два треугольника, причем $AB > BC$, $AB = AD$, $DC = CD$, а прямые, содержащие диагонали четырехугольника, пересекаются в точке O. Сравните периметры пятиугольников $BCODA$ и $DCOBA$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 162°. Найдите число сторон этого многоугольника.

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны. Большая диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне BC, $\angle BAD = \angle CDA$. Сравните периметры пятиугольников $ABDEF$ и $ACDEF$.

Вариант 2

1. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 165°. Найдите число сторон этого многоугольника.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны имеют равные длины. Диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне ED, $\angle EAC = \angle DCA$. Сравните периметры четырехугольников $EABC$ и $DCBA$.

VI. Самопроверка задач самостоятельной работы

(Учащиеся проверяют решения задач, используя готовые ответы и указания, распечатанные для каждого ученика. Менее подготовленным учащимся проверить свою работу помогает учитель.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. $180° \cdot (12 - 2) = 1800°$.

2. Рис. 5.17.

$x + x + x + 3 + 2x + 2x - 4 = 34$; $x = 5$.

Ответ: 5 см, 5 см, 8 см, 10 см, 6 см.

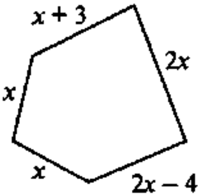


Рис. 5.17

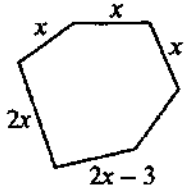


Рис. 5.18

Вариант 2

1. $180° \cdot (13 - 2) = 1980°$.

2. Рис. 5.18.

$x + x + x + 2x + 2x - 3 + x + 1 = 30$; $x = 4$.

Ответ: 4 см, 4 см, 4 см, 8 см, 5 см, 5 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. $180° \cdot (n - 2) = 2160°$.

Ответ: 14 сторон.

2. Рис. 5.19.

Доказать:

1) $\Delta ABC = \Delta ADC$;

2) $\Delta ABO = \Delta ADO$;

3) $P_{ABCOD} = P_{ABOCD}$.

Вариант 2

1. $180° \cdot (n - 2) = 2520°$.

Ответ: 16 сторон.

2. Рис. 5.20.

Доказать:

1) $\Delta ABC = \Delta ADC$;

2) $\Delta ABO = \Delta ADO$;

3) $P_{BCODA} = P_{DCOBA}$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $180° \cdot (n - 2) : n = 162°$.

2. Рис. 5.21.

Доказать:

1) $\Delta ABD = \Delta DCA$;

2) $P_{ABDEF} = P_{ACDEF}$.

Вариант 2

1. $180° \cdot (n - 2) : n = 165°$.

2. Рис. 5.22.

Доказать:

1) $\Delta AEC = \Delta CDA$;

2) $P_{EABC} = P_{DCBA}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;

Рис. 5.19

Рис. 5.20

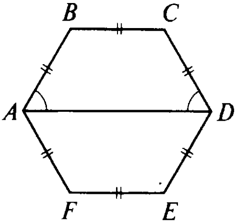


Рис. 5.21

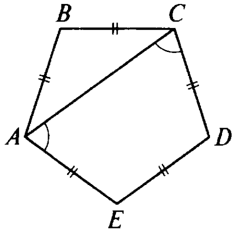


Рис. 5.22

- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равна сумма углов выпуклого многоугольника?
2. Как вычислить угол выпуклого n-угольника, если известно, что все его углы равны?
3. Как найти число сторон выпуклого n-угольника, если известна сумма его углов?

Домашнее задание

1. Решить задачи № 366, 369, 370.
2. Решить задачу № 7 (рабочая тетрадь).
3. Решить дополнительную задачу.

Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от числа сторон многоугольника.

Урок 5. Параллелограмм

Основные дидактические цели урока: ввести понятие параллелограмма и рассмотреть его свойства; научить учащихся применять свойства параллелограмма при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 370 и дополнительной задачи. Два ученика заранее записывают решение на доске.)

Ответ к задаче № 370: 30°, 60°, 120°, 150°.

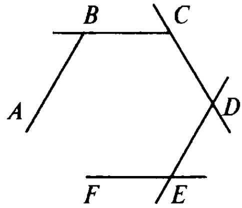


Рис. 5.23

Решение дополнительной задачи: сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$ (рис. 5.23).

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна: $(180° - \angle A) + (180° - \angle B) + (180° - \angle C) + \ldots = 180° \cdot n - (\angle A + \angle B + \angle C + \ldots) = 180° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 360°$.

Итак, сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°, т. е. не зависит от числа его сторон.

III. Решение задач по готовым чертежам (работа в парах)

(Работа проводится для подготовки к изучению нового материала. Дать на обдумывание 2–3 мин, а затем заслушать варианты ответов.)

Задача № 1. *Дано:* $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (рис. 5.24).
Доказать: $BC = AD$, $\angle A = \angle C$.

Задача № 2. *Дано:* $AB \parallel CD$, $AB = CD$ (рис. 5.25).
Доказать: O – середина AC и BD.

IV. Работа по теме урока

1. Ввести понятие параллелограмма.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.26) и запись:
$ABCD$ – параллелограмм. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

2. Отработка определения параллелограмма в процессе решения устных задач по готовым чертежам.

1) *Дано:* $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 5.27).
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

2) *Дано:* $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (рис. 5.28).
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

3) *Дано:* $MN \parallel PQ$, $\angle M = \angle P$ (рис. 5.29).
Доказать: $MNPQ$ – параллелограмм.

4) Рис. 5.30. *Дано:*
а) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;

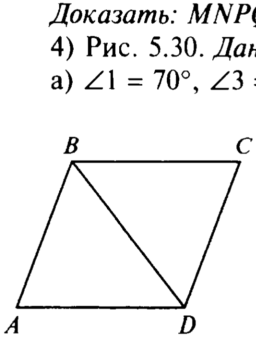


Рис. 5.24

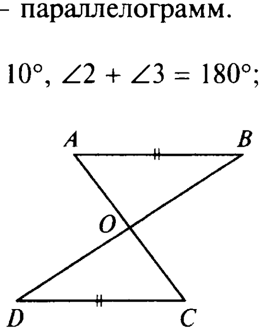


Рис. 5.25

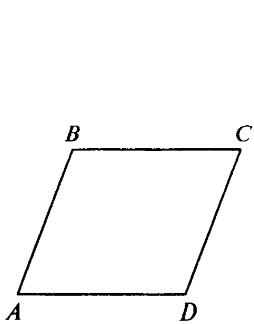


Рис. 5.26

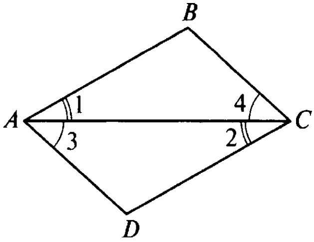


Рис. 5.27

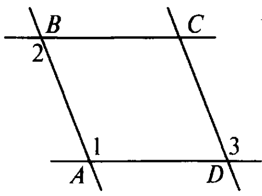


Рис. 5.28

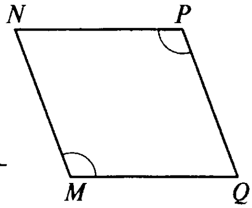


Рис. 5.29

б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 \neq \angle 4$.

Является ли $ABCD$ – параллелограммом?

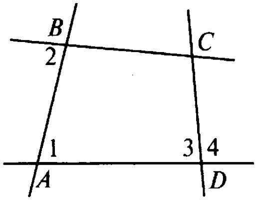


Рис. 5.30

3. Изучение свойств параллелограмма (работа в группах).

(Учитель делит класс на группы для решения задач творческого характера.)

Задание. Рассмотрите противолежащие стороны, углы и диагонали параллелограмма. Сформулируйте и докажите их свойства.

– Что можно сказать о противолежащих сторонах и углах параллелограмма?
– Что можно сказать о точке пересечения диагоналей параллелограмма?

Свойства параллелограмма

1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

2) Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.

3) В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

(Последнее свойство может быть выдвинуто учащимися, хотя в учебнике его нет.)

На доске и в тетрадях рисунок и запись:

1) $AB = CD$, $AD = BC$ (рис. 5.31).

2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (рис. 5.32).

$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$.

3) $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 5.33).

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочей тетради (самостоятельно).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

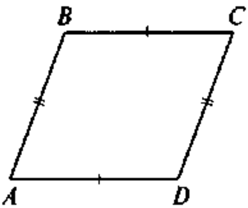


Рис. 5.31

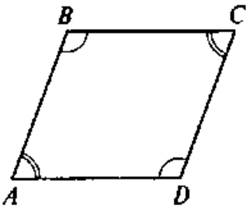


Рис. 5.32

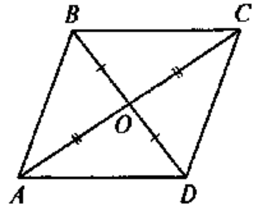


Рис. 5.33

Задача № 8

а) $AB = CD = 12$ см; $BC = AD = 20$ см;

б) $\angle C = 38°$, $\angle B = \angle D = 142°$.

Задача № 9

Ответ: 6 см.

2. Решить задачу № 376 (б).

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Наводящие вопросы.

– По условию задачи в параллелограмме $ABCD$ $\angle A - \angle B = 55°$. Как вы понимаете это условие?

– Что вы знаете об углах A и B параллелограмма $ABCD$?

– Как найти каждый из углов параллелограмма?

3. Решить самостоятельно задачи № 376 (д), 372 (а, б), 371 (б).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 376 (д)

Решение: В треугольнике ACD $\angle D = 180° - (\angle A + \angle C) = 127°$ (рис. 5.34). В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = \angle D = 127°$, $\angle A = 180° - \angle B = 53°$, $\angle C = \angle A = 53°$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 53°$, $\angle B = \angle D = 127°$.

Наводящие вопросы.

– Как можно найти угол D?

– Что можно сказать об углах B, A, C данного параллелограмма?

Задача № 372 (а)

Решение: Пусть $AB = x$ см, тогда $AD = x + 3$ см (рис. 5.35). В параллелограмме $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$. Тогда $48 = x + (x + 3) + x + (x + 3)$;

$4x + 6 = 48$;

$x = 10{,}5$.

$AB = AC = 10{,}5$ см, $AD = BC = 13{,}5$ см.

Ответ: 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см.

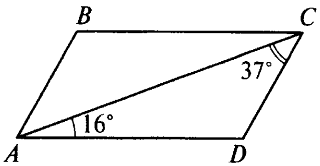


Рис. 5.34

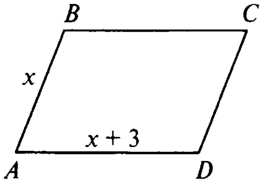


Рис. 5.35

Наводящие вопросы.

– Обозначим сторону AB за x. Чему равны другие стороны параллелограмма?
– Почему сторона CD не может быть равной $(x + 3)$ см?
– Какое уравнение можно составить для нахождения неизвестной x с учетом того, что периметр параллелограмма равен 48 см?

Задача № 372 (б)

Решение: Разность двух сторон равна 7 см, значит, одна сторона равна x см, а смежная с ней $(x + 7)$ см, тогда противолежащие им стороны равны x см и $(x + 7)$ см соответственно.

Периметр параллелограмма равен 48 см, следовательно, $x + (x + 7) + x + (x + 7) = 48$.

Тогда: $x = 8{,}5$; $x + 7 = 15{,}5$, т. е. стороны параллелограмма равны 8,5 см; 15,5 см; 8,5 см; 15,5 см.

Ответ: 8,5 см; 15,5 см; 8,5 см; 15,5 см.

Наводящие вопросы.

– Как вы понимаете условие «разность двух сторон равна 7 см»?
– Похожа ли эта задача на предыдущую?

Задача № 371 (б)

Решение: $AB \parallel CD$, следовательно, $\angle A + \angle D = 180°$ (рис. 5.36), так как $\angle A$ и $\angle D$ – внутренние односторонние углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AD. Так как $\angle A = \angle C$ и $\angle A + \angle D = 180°$, то $\angle C + \angle D = 180°$, следовательно, так как сумма внутренних односторонних углов C и D при прямых AD и BC и секущей CD равна 180°, то прямые AD и BC параллельны.

Наводящие вопросы.

– Какой четырехугольник называется параллелограммом?
– Что еще нужно доказать, чтобы $ABCD$ был параллелограммом?
– Когда прямые BC и AD будут параллельными?
– Равна ли сумма углов C и D 180°?

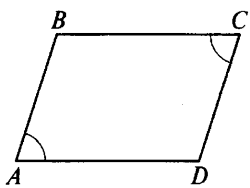


Рис. 5.36

4. Решение дополнительных задач (наиболее подготовленными учащимися).

Задача № 1

Из произвольной точки равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

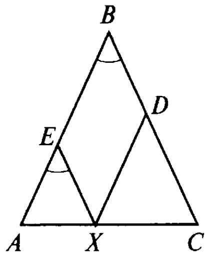


Рис. 5.37

Решение: Пусть точка X – произвольная точка основания AC равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = a$, $XD \parallel AB$, $XE \parallel BC$ (рис. 5.37). Так как $XE \parallel BC$, $XD \parallel AB$, то $BEXD$ – параллелограмм, $BD = XE$, $BE = DX$. Так как $XD \parallel AB$, то $\angle DBE = \angle XEA$ как соответственные углы при параллельных прямых CB и XE и секущей AB.

В ΔAXE $\angle AXE = 180° - (\angle A + \angle XEA)$. В ΔABC $\angle C = 180° - (\angle A + \angle DBE)$. Так как $\angle XEA = \angle DBE$, то $\angle C = \angle AXE$. Но $\angle C = \angle A$ как углы при основании равнобедренного треугольника, тогда $\angle A = \angle AXE$ и ΔAEX равнобедренный с основанием AX, а $AE = XE$.

$P_{BEXD} = XE + EB + BD + DX$, но так как $XE = BD$, $EB = DX$, $AE = XE$, то $P_{BEXD} = XE + EB + XE + EB = 2(XE + EB) = 2 \cdot (AE + EB) = 2 \cdot AB = 2 \cdot a$.

Ответ: $2a$.

Задача № 2

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

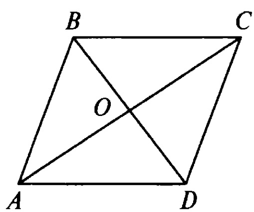


Рис. 5.38

Решение: $P_{BOC} - P_{COD} = (BC + BO + OC) - (CD + CO + OD) = BC - CD = 2$ (рис. 5.38). ($BO = OD$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), откуда $BC = CD + 2$. $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.

В параллелограмме противолежащие стороны равны, тогда $P_{ABCD} = 2 \cdot (BC + CD) = 2 \cdot (CD + 2 + CD) = 2 \cdot (2 + 2CD) = 12$, откуда $CD = 2$, а $BC = 4$.

Ответ: 2, 4, 2, 4.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой четырехугольник называется параллелограммом?
2. Сформулируйте свойства параллелограмма.

Домашнее задание

1. П. 43, вопросы 6–8 (учебник, с. 113).
2. Решить задачи № 371 (а), 372 (в), 376 (в, г).
3. Решить задачу № 10 (рабочая тетрадь, рис. 5.39).
4. Решить дополнительную задачу.

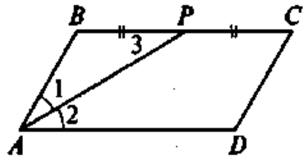


Рис. 5.39

Сколько углов с градусной мерой меньше 10° может быть в выпуклом многоугольнике?

Урок 6. Признаки параллелограмма

Основные дидактические цели урока: рассмотреть признаки параллелограмма и закрепить полученные знания в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Менее подготовленные учащиеся получают задание подготовить у доски свойства параллелограмма с доказательством.)

2. Доказать дополнительные свойства параллелограмма (работа в группах).

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, AE – биссектриса $\angle BAD$ (рис. 5.40).

Доказать: ΔABE – равнобедренный.

Доказательство: Так как $ABCD$ – параллелограмм, значит, $BC \parallel AD$, тогда $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE. AE – биссектриса $\angle BAD$, значит, $\angle BAE = \angle EAD$, поэтому $\angle BAE = \angle BEA$. В ΔABE $\angle BAE = \angle BEA$, значит, ΔABE – равнобедренный с основанием AE.

Наводящие вопросы.

– Сформулируйте признак равнобедренного треугольника.
– Какие углы в ΔBAE могут быть равными? Почему?

Рис. 5.40

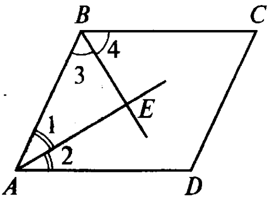


Рис. 5.41

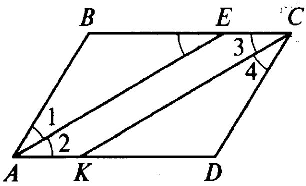


Рис. 5.42

2а) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, BE – биссектриса $\angle CBA$, AE – биссектриса $\angle BAD$ (рис. 5.41).

Доказать: $BE \perp AE$.

Доказательство: AE – биссектриса, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. BE – биссектриса, значит, $\angle 3 = \angle 4$. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°, поэтому $\angle ABC + \angle BAD = 180°$, т. е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, то $2 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = 180°$, $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. В ΔABE $\angle AEB = 180° - (\angle 1 + \angle 3) = 90°$, т. е. $BE \perp AE$.

2б) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; AE, CK – биссектрисы $\angle A$ и $\angle C$ (рис. 5.42).

Доказать: $AE \parallel CK$ или AE и CK совпадают.

Доказательство: Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\angle 2 = \angle BEA$, как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE. В параллелограмме противолежащие углы равны, следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$, значит, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Так как $\angle 2 = \angle BEA$, $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle BEA = \angle 3$, следовательно, прямые AE и CK параллельны, по признаку параллельности прямых. Прямые AE и CK совпадут, если в параллелограмме смежные стороны равны.

Наводящие вопросы.

– В каком случае прямые AE и CK будут параллельными?

– Равны ли углы BEA и $\angle 3$? Почему?

– В каком случае AE и CK совпадут?

3. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение дополнительной задачи и задачи № 376 (в). Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать во время теоретического опроса.)

Задача № 376 (в)

Решение: В параллелограмме противолежащие углы равны, т. е. $\angle A = \angle C$. $\angle A + \angle C = 142°$, следовательно, $\angle A = \angle C = 71°$. Тогда $\angle B = \angle D = 180° - 71° = 109°$.

Ответ: 71°, 109°, 71°, 109°.

Решение дополнительной задачи: Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°. Тогда такой многоугольник может иметь не более двух внешних углов с градусной мерой больше 170°. Это означает, что острых углов с градусной мерой меньше 10° может быть не более двух. В качестве примера можно привести треугольник с углами, равными 1°, 2° и 177°.

4. Индивидуальная работа по карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время теоретического опроса.)

I уровень сложности

1. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle B = 126°$.

2. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см, а одна из сторон в два раза больше другой.

II уровень сложности

1. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A + \angle B + \angle C = 237°$.

2. Периметр параллелограмма равен 40 дм, а две из его сторон относятся как 3 : 2. Найдите стороны параллелограмма.

III уровень сложности

1. Из вершины острого угла M параллелограмма $MNKP$ проведены перпендикуляры ME и MF к прямым NK и KP соответственно. Найдите углы параллелограмма, если $\angle EMF = 150°$.

2. Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая продолжения сторон AB, CD, AD и BC соответственно в точках E, F, K и L. Докажите, что $EK = FL$.

3. Подготовка к изучению нового материала.

Фронтальная работа с классом (устно).

– Что означают слова «свойства» и «признак»? Приведите примеры.

(*Примерный ответ.* В качестве примеров можно привести свойства равнобедренного треугольника и признак равнобедренного треугольника, свойства параллельных прямых и признаки параллельности прямых.)

– Что такое обратная теорема?

– Всегда ли верно утверждение, обратное данному? Приведите примеры. (*Нет, не всегда. Сумма смежных углов равна 180°. Обратное утверждение «если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные» неверно.*)

III. Работа по теме урока

Задание. Сформулируйте утверждения, обратные свойствам параллелограмма, и выясните, верны ли они.

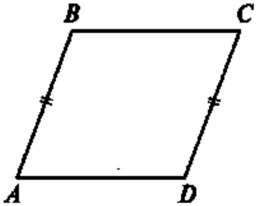


Рис. 5.43

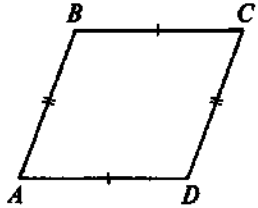


Рис. 5.44

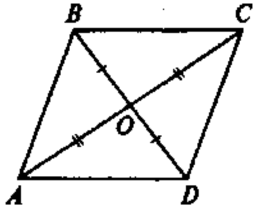


Рис. 5.45

(Задание учитель распределяет по рядам в качестве учебно-исследовательской работы, а затем класс обсуждает результаты работы.)

На доске и в тетрадях рисунки и запись:

Признаки параллелограмма

1. Если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.43).

2. Если $AB = CD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.44).

3. Если $AC \cap BD = O$ и $BO = OD$, $AO = OC$, то $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.45).

IV. Закрепление изученного материала

1. Самостоятельно решить задачи № 11, 13 (рабочая тетрадь).

(По окончании работы учащиеся сдают тетради на проверку.)

2. Решить задачу № 379.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

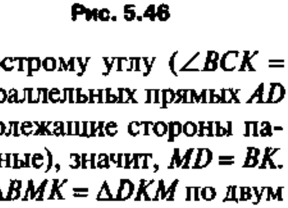


Рис. 5.46

Задача № 379

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $BK \perp AC$, $DM \perp AC$ (рис. 5.46).

Доказать: $BMDK$ – параллелограмм.

Доказательство:

1) $\Delta BKC = \Delta DMA$ по гипотенузе и острому углу ($\angle BCK = \angle DAC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC; $BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, ΔBKC и ΔDMA прямоугольные), значит, $MD = BK$.

2) ΔBMK и ΔDKM – прямоугольные, $\Delta BMK = \Delta DKM$ по двум катетам ($MD = BK$, KM – общий катет), значит, $BM = DK$.

3) В четырехугольнике $BMDK$ противолежащие стороны равны ($MD = BK$ и $BM = DK$), следовательно, $BMDK$ – параллелограмм.

Наводящие вопросы.

– В каком случае четырехугольник $BMDK$ будет параллелограммом?

– Можно ли доказать, что $BK = MD$, $BM = KD$?

V. Самостоятельное решение задач

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Решить задачи.

I уровень сложности: № 382, дополнительные задачи № 1, 2.

II уровень сложности: № 382, дополнительные задачи № 3, 4.

Задача № 1

Точки M и N – середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ – параллелограмм.

Дано: $ABDC$ – параллелограмм, M – середина BC, N – середина AD.

Доказать: $AMCN$ – параллелограмм.

Доказательство:

Так как M – середина BC, N – середина AD, то $BM = MC$, $AN = ND$ (рис. 5.47). Но $BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, тогда $MC = AN$. $BC \parallel AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, значит, $MC \parallel AN$. В четырехугольнике $AMCN$ противолежащие стороны MC и AN равны и параллельны, следовательно, $AMCN$ – параллелограмм.

Задача № 2

В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM, так, что $AM = MD$. Докажите, что $ABDC$ – параллелограмм.

Дано: ΔABC, AM – медиана, $D \in AM$, $AM = MD$.

Доказать: $ABDC$ – параллелограмм.

Доказательство:

Так как AM – медиана ΔABC, то $CM = BM$ (рис. 5.48). По построению $AM = DM$. Получили, что в четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC пересекаются в точке M и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, $ABDC$ – параллелограмм.

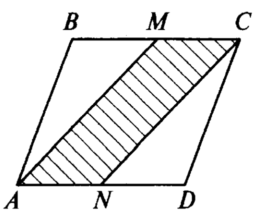


Рис. 5.47

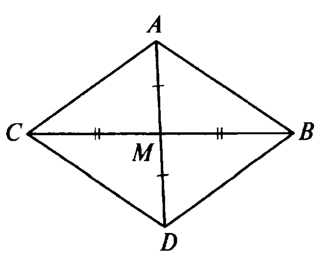


Рис. 5.48

Задача № 3

Точки K, L, M и N – середины сторон соответственно AB, BC, CD, и AD параллелограмма $ABCD$.

Доказать: четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK – параллелограмм.

Доказательство:

1) Из определения параллелограмма следует, что $BC \parallel AD$, поэтому $LC \parallel AN$ (рис. 5.49). Кроме того, $LC = \frac{AD}{2} = AN$. Значит, противоположные стороны LC и AN четырехугольника $ANCL$ равны и параллельны, следовательно, $ANCL$ – параллелограмм. Поэтому $AL \parallel CN$.

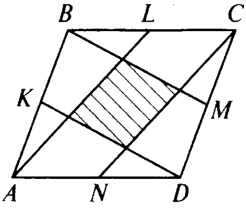


Рис. 5.49

2) Из определения параллелограмма следует, что $AB \parallel CD$, поэтому $KB \parallel MD$. Кроме того, $KB = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = MD$. Значит, противоположные стороны KB и MD четырехугольника $KBMD$ равны и параллельны, следовательно, $KBMD$ – параллелограмм. Поэтому $KD \parallel MB$.

3) Так как $KD \parallel MB$ и $AL \parallel CN$, то противоположные стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK попарно параллельны. Следовательно, это параллелограмм.

Задача № 4

На сторонах AB, BC, CD, и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке).

Доказать: $KLMN$ – параллелограмм.

Доказательство:

По условию задачи $AM : MB = BN : NC = CK : KD = DL : AL$ (рис. 5.50). В параллелограмме $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, тогда $AM = CK$, $BM = KD$, $BN = DL$, $NC = LA$. $\Delta NCK = \Delta LAM$, $\Delta MBN = \Delta KDL$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ как противолежащие углы параллелограмма), тогда $MN = KL$, $NK = ML$, следовательно, в четырехугольнике $MNKL$ противолежащие стороны равны, а это значит, что $MNKL$ – параллелограмм.

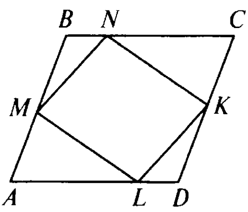


Рис. 5.50

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте признаки параллелограмма.
2. Сформулируйте свойства параллелограмма.

Домашнее задание

1. П. 44, вопрос 9 (учебник, с. 113).
2. Решить задачи № 373, 378 (устно), 383.
3. Решить задачу № 12 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительные задачи.

I уровень сложности: В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. Докажите, что $BC = AD$.

II уровень сложности: Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая – стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ – параллелограмм.

Урок 7. Решение задач по теме «Параллелограмм»

Основные дидактические цели урока: закрепить свойства и признаки параллелограмма в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Работа у доски.

(Три ученика готовят у доски доказательства признаков параллелограмма.)

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 373. Один ученик готовит решение задачи на доске. Решение заслушать после проверки задач по готовым чертежам.)

Задача № 373

Решение: В ΔBCH $\angle H = 90°$, $\angle C = 30°$, следовательно, $BC = 2 \cdot HB$, т. е. $BC = 13$ см (рис. 5.51). $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$, $AB = DC$, $BC = DA$ как противолежащие стороны параллелограмма, значит, $2 \cdot AB + 13 \cdot 2 = 50$.

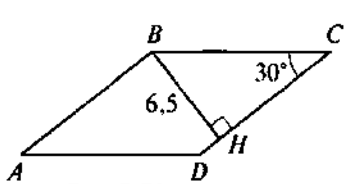


Рис. 5.51

Таким образом, $AB = 12$ см, тогда $CD = AB = 12$ см, $AD = BC =$ $= 13$ см.

Ответ: $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольнике BCH? Можно ли найти другие его стороны?

– Как найти стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 50 см.

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам.)

I уровень сложности

1. Точки E и K – середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $AECK$ – параллелограмм.

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $AC = 2$ дм, $AO = 10$ см, $BD = 1{,}5$ дм, $BO = 7$ см. Выясните, является ли $ABCD$ параллелограммом?

II уровень сложности

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD отмечены соответственно точки M и N так, что $\angle BMC = \angle AND$. Докажите, что $AMCN$ – параллелограмм.

2. Точки A и B делят диагональ MK параллелограмма $MNKP$ на три равные части. Является ли четырехугольник $ANBP$ параллелограммом? Ответ обоснуйте.

III уровень сложности

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $AM = CK$, $AP = CN$ (рис. 5.52).

Доказать: $MNKP$ – параллелограмм.

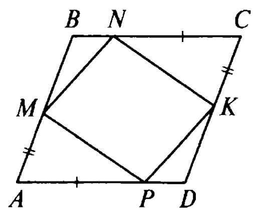


Рис. 5.52

2. Через точку пересечения диагоналей O параллелограмма $ABCD$ проведена прямая MN, пересекающая стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Является ли $MBND$ параллелограммом? Ответ обоснуйте.

3. Решение задач по готовым чертежам.

(Ученики решают задачи с последующей самопроверкой по готовым ответам. В это время учитель может заслушать доказательства признаков параллелограмма и проверить решение дополнительных домашних задач индивидуально у тех учащихся, которые их решали.)

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.53).

Найти: $\angle C$, $\angle D$.

2) *Дано:* $MNKP$ – параллелограмм (рис. 5.54).

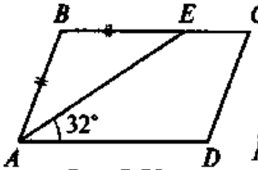


Рис. 5.53

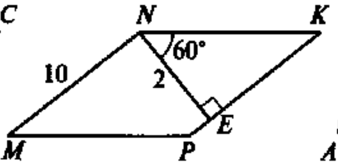


Рис. 5.54

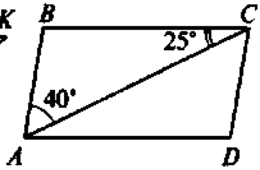


Рис. 5.55

Найти: MP, PK.

3) Рис. 5.55.

Найти: углы параллелограмма *ABCD.*

4) *Дано: ABCD* – параллелограмм (рис. 5.56).

Найти: P_{ABCD}.

5) *Дано: ABCD* – параллелограмм (рис. 5.57).

Найти: AD.

6) *Дано: ABCD* – параллелограмм (рис. 5.58).

Найти: P_{ABCD}, $\angle AED$.

7) *Дано: NBFD* – параллелограмм. *AD* = 4 см, *NB* = 5 см (рис. 5.59).

Найти: BC, CD.

8) *Дано: ABCD* – параллелограмм. P_{MNKP} = 20 см (рис. 5.60).

Найти: MN, MP.

9) *Дано: BNDM* – параллелограмм. *AB* : *BC* = 4 : 5, P_{ABCD} = = 18 см (рис. 5.61).

Найти: AD, DC.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

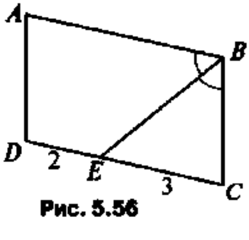


Рис. 5.56

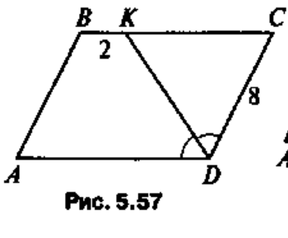


Рис. 5.57

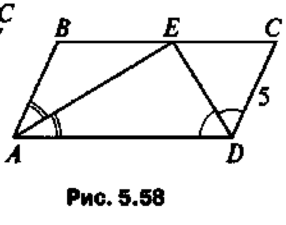


Рис. 5.58

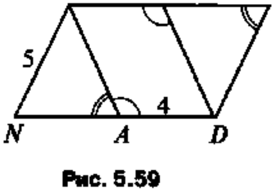


Рис. 5.59

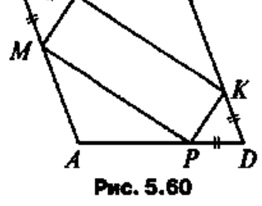


Рис. 5.60

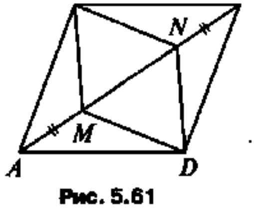


Рис. 5.61

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены восемь-девять задач;
- оценка «4» – правильно решены шесть-семь задач;
- оценка «3» – правильно решены три-пять задач;
- оценка «2» – правильно решено менее трех задач.

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1) $\angle C = 64°$, $\angle D = 116°$.
2) $MP = 4$ см, $PK = 10$ см.
3) $\angle B = \angle D = 115°$, $\angle A = \angle C = 65°$.
4) $P_{ABCD} = 16$ см.
5) $AD = 10$ см.
6) $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle AED = 90°$.
7) $BC = 4$ см, $CD = 5$ см.
8) $MN = 3$ см, $MP = 7$ см.
9) $AD = 5$ см, $DC = 4$ см.

5. Проверка решения дополнительных домашних задач.

I уровень сложности

Рис. 5.62.

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 60° + 50° = 110°$.

$\angle ABC$ и $\angle BCD$ – односторонние углы при прямых CD и AB и секущей BC. $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$, значит, $CD \parallel AB$.

В четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны AB и CD параллельны и равны, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, а это значит, что $BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма.

II уровень сложности

Рис. 5.63.

а) $\Delta AOL = \Delta CON$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AO = CO$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, $\angle AOL = \angle CON$ как вертикальные, $\angle NCO = \angle LAO$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC), тогда $NO = LO$.

б) $\Delta BOM = \Delta DOK$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BO = DO$, так как диагонали параллелограмма точкой пере-

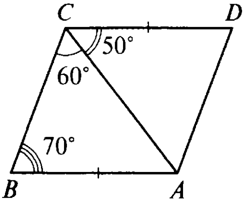


Рис. 5.62

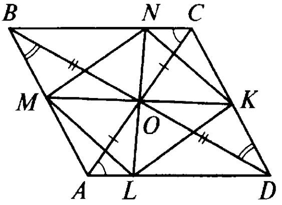


Рис. 5.63

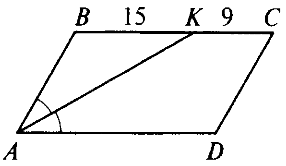


Рис. 5.64

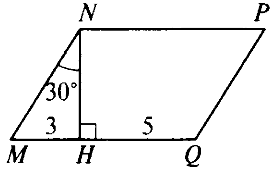


Рис. 5.65

сечения делятся пополам, $\angle BOM = \angle DOK$ как вертикальные, $\angle MBO = \angle KDO$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD), тогда $MO = KO$.

в) В четырехугольнике $MNKL$ диагонали MK и NL точкой пересечения делятся пополам ($MO = KO$, $NO = AO$), следовательно, $MNKL$ – параллелограмм.

III. Решение задач

1. Решить задачи № 374, 377 (выполнить рисунок и записать краткое решение).

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях. По окончании работы учащиеся слушают решения задач, а затем исправляют ошибки.)

Задача № 374

Решение: ΔABK – равнобедренный, $AB = BK = CD = 15$ см, $BC = AD = 15 + 9 = 24$ см, $P_{ABCD} = (15 + 24) \cdot 2 = 78$ см (рис. 5.64).

Ответ: 78 см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о ΔABK, если AK – биссектриса $\angle BAD$ параллелограмма $ABCD$?

– Чему равны стороны параллелограмма $ABCD$? Чему равен его периметр?

Задача № 377

Решение: В ΔMNH $\angle H = 90°$, $\angle N = 30°$, $MN = 3$ см, следовательно, $MN = 6$ см (рис. 5.65). $MNPQ$ – параллелограмм, следовательно, $MN = PQ = 6$ см, $NP = MQ = 8$ см.

Ответ: $MN = PQ = 6$ см, $NP = MQ = 8$ см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о ΔMNH? Какую из его сторон можно найти?

– Найдите стороны параллелограмма $MNPQ$.

IV. Самостоятельная работа

(Задания I уровня сложности предлагаются менее подготовленным учащимся, задания III уровня сложности – самым подготовленным, задания II уровня сложности – всем остальным, что составляет большинство класса. Учащихся, выполняющих задания I и III уровня, необходимо предупредить о критериях оценивания их работ. Правильное решение всех заданий I уровня может быть оценено максимально в 4 балла, для получения 5 баллов, решающим задания III уровня, необходимо правильно решить или решить с негрубыми ошибками третье задание. Учащиеся сами выбирают уровень сложности.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AC = 20$ см, $BD = 10$ см, $AB = 13$ см. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите периметр ΔCOD.

2. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ с острым углом A проведен перпендикуляр BK к прямой AD; $BK = AB : 2$. Найдите $\angle C$, $\angle D$.

3. Середина отрезка BD является центром окружности с диаметром AC, причем точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Вариант 2

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, O – точка пересечения диагоналей. Периметр ΔAOD равен 25 см, $AC = 16$ см, $BD = 14$ см. Найдите BC.

2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B опущен перпендикуляр BK к прямой AD, $AD = BK$. Найдите $\angle C$, $\angle D$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении диагонали AC за вершины A и C отмечены точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Докажите, что $MBND$ – параллелограмм.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $AB \parallel CD$. На сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $BM = KD$. Докажите, что точки M и K находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения диагоналей четырехугольника.

2. На сторонах PK и MH параллелограмма $MPKH$ взяты точки A и B, соответственно $MP = PB = AK$; $\angle MPB = 60°$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки BM и AH.

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AB и BC – точки M и P соответственно, причем $PK = MB$, $\angle KPC = 80°$, $\angle C = 50°$. Докажите, что $KMBP$ – параллелограмм.

Вариант 2

1. В четырехугольнике $MPKH$ $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, пере-

секающая стороны PK и MH в точках A и B соответственно. Докажите, что $AP = HB$.

2. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K, $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30°$. Найдите угол параллелограмма и сравните отрезки AM и CK.

3. В треугольнике MPK $\angle M = 65°$. На сторонах MK, MP, PK отмечены точки A, B, C соответственно так, что середина стороны PK – точка C, $AM = KC$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50°$. Докажите, что $BPCA$ – параллелограмм.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках M и K соответственно; $\angle BOM = 90°$. Докажите, что $KD = BM$.

2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и H соответственно так, что отрезки BH и MD пересекаются в точке O; $\angle BHD = 95°$, $\angle DMC = 90°$, $\angle BOD = 155°$. Найдите отношение длин отрезков AB и MD и углы параллелограмма.

3. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC. Через вершину C вне треугольника проведена прямая, параллельная AB и пересекающая луч MK в точке E. Докажите, что $KE = AC : 2$.

Вариант 2

1. В выпуклом четырехугольнике $MPKH$ $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH и PK отмечены точки A и B так, что $PB = PA$. Отрезок AB проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $HP \perp AB$.

2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Отрезки BM и KD пересекаются в точке O; $\angle BOD = 140°$, $\angle DKB = 110°$, $\angle BMC = 90°$. Найдите отношение длин отрезков MC и AD и углы параллелограмма.

3. Точки A и B принадлежат соответственно сторонам PE и ET треугольника PET. Прямая, проходящая через вершину T вне треугольника, пересекает луч AB в точке K так, что $AP = KT$, $AB = BK = PT : 2$. Докажите, что точка A является серединой отрезка PE.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте признаки параллелограмма.
2. Сформулируйте свойства параллелограмма.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 375, 380, 384 (устно).

2. Решить задачу № 14 (рабочая тетрадь).

3. Решить дополнительные задачи.

I уровень сложности: *Дано: ABCD* – параллелограмм. AN – биссектриса $\angle BAD$, BM – биссектриса $\angle ABC$ (рис. 5.66). *Доказать*: $ABNM$ – параллелограмм.

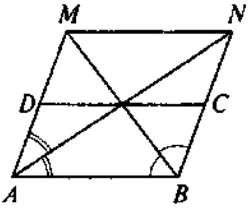


Рис. 5.66

II уровень сложности: Докажите, что угол между перпендикулярами, проведенными из вершины тупого угла параллелограмма к прямым, содержащим стороны параллелограмма, равен острому углу параллелограмма, а угол между перпендикулярами, проведенными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

Урок 8. Трапеция

Основные дидактические цели урока: ввести понятия трапеции и ее элементов, познакомить учащихся с равнобедренной и прямоугольной трапециями; рассмотреть некоторые свойства равнобедренной трапеции; научить учащихся применять полученные знания в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Работа в группах.

(Ученики проводят работу над ошибками самостоятельной работы с использованием готовых ответов и указаний к задачам. Учитель объединяет учащихся одного варианта по группам для того, чтобы они могли проконсультироваться друг у друга или вместе разобраться в решении задачи.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.67), тогда $CD = AB = 13$ см, $OC = AO = 10$ см, $BD = OD = 5$ см (объясните).

$P_{COD} = 10 + 5 + 13 = 28$ см.

2. $BK = \dfrac{AB}{2}$ (рис. 5.68), тогда $\angle A = 30°$ (объясните), значит, $\angle C = 30°$, $\angle D = 150°$ (объясните).

3. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 5.69) диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $ABCD$ – параллелограмм.

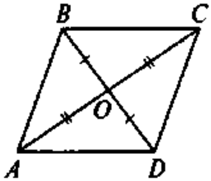


Рис. 5.67

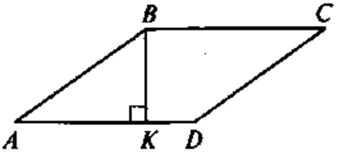


Рис. 5.68

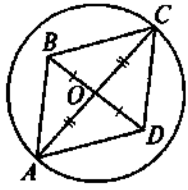


Рис. 5.69

Вариант 2

1. $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.70), тогда $AO = CO = 8$ см, $BO = DO = 7$ см (объясните). Так как $P_{\text{AOD}} = 25$ см, то $BC = AD = 10$ см.

2. $AK = BK$ (рис. 5.71), тогда $\angle A = 45°$ (объясните), $\angle C = 45°$, $\angle D = 135°$ (объясните).

3. $ABCD$ – параллелограмм (рис. 5.72), тогда $AO = CO$, $BO = DO$. В четырехугольнике $MBND$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $MBND$ – параллелограмм.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.73.

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм и $BC \parallel AD$.

б) Докажите, что $\Delta BOM = \Delta DOK$ и $OM = OK$.

2. Рис. 5.74.

а) Докажите, что ΔMPB – равносторонний, $\angle M = 60°$, $\angle K = 60$.

б) Докажите, что ΔAKH – равносторонний, $\Delta AKH = \Delta MPB$, тогда $MB = AH$, $\angle M = \angle K = 60°$, $\angle P = \angle H = 120°$.

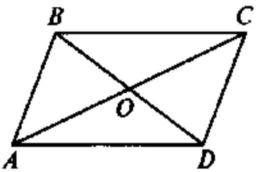


Рис. 5.70

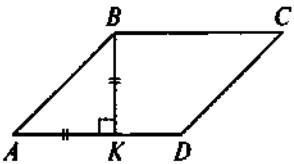


Рис. 5.71

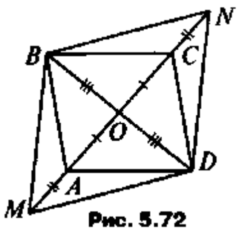


Рис. 5.72

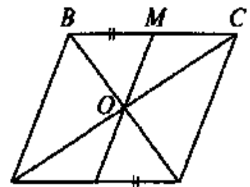


Рис. 5.73

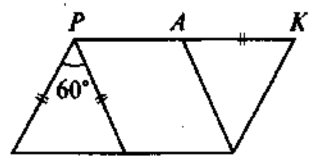


Рис. 5.74

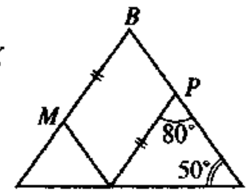


Рис. 5.75

3. Рис. 5.75.

а) Найдите $\angle B$ и докажите, что $MB \parallel KP$.

б) Докажите, что $MBPK$ – параллелограмм.

Вариант 2

1. Рис. 5.76.

а) Докажите, что $MPKH$ – параллелограмм и $PO = HO$.

б) Докажите, что $\Delta POA = \Delta HOB$ и $PA = HB$.

2. Рис. 5.77.

а) Докажите, что ΔABM – равнобедренный, $\angle B = 120°$, $\angle BAD = 60°$.

б) Докажите, что $\Delta ABM = \Delta KDC$ и $AM = KC$, $\angle B = \angle D = 120°$, $\angle A = \angle C = 60°$.

3. Рис. 5.78.

а) Докажите, что в ΔABM $MA = BA$.

б) Докажите, что $BPCA$ – параллелограмм.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.79.

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм и $AO = CO$.

б) Докажите, что $\Delta AOK = \Delta COM$ и $KO = MO$.

в) Докажите, что $\Delta DKO = \Delta BMO$ и $KD = BM$.

2. Рис. 5.80.

$\angle MDC = 60°$, $\angle MCD = 30°$ (объясните).

$MD = \dfrac{CD}{2}$, $AB : MD = 2 : 1$, $\angle C = \angle A = 30°$, $\angle B = \angle D = 150°$.

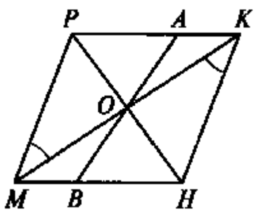


Рис. 5.76

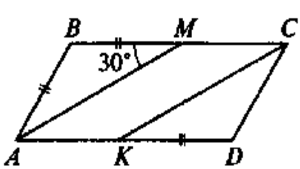


Рис. 5.77

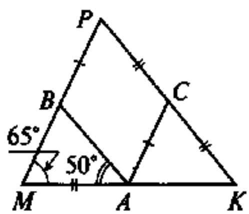


Рис. 5.78

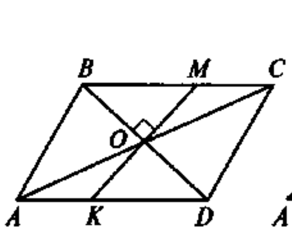


Рис. 5.79

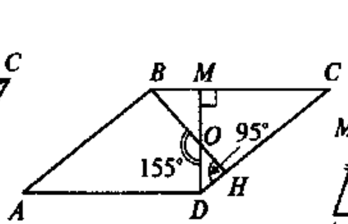


Рис. 5.80

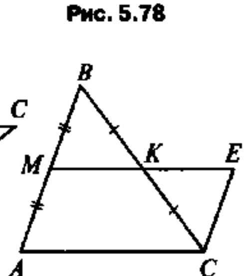


Рис. 5.81

3. Рис. 5.81.

а) Докажите, что $\Delta MBK = \Delta ECK$ и $EC = MB = AM$, $KE = MK = \frac{ME}{2}$.

б) Докажите, что $AMEC$ – параллелограмм и $ME = AC$, т. е. $KE = \frac{AC}{2}$.

Вариант 2

1. Рис. 5.82.

а) Докажите, что $MPKH$ – параллелограмм и $MO = OK$.

б) Докажите, что $\Delta MOA = \Delta KOB$ и $AO = OB$.

в) Докажите, что $PO \perp AB$ и $PH \perp AB$.

2. Рис. 5.83.

$\angle KDC = 50°$, $\angle MCB = 60°$, $\angle CBM = 30°$ (объясните).

$CM = \frac{BC}{2}$; $MC : AD = 1 : 2$; $\angle C = \angle A = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$.

3. Рис. 5.84.

а) Докажите, что $PAKT$ – параллелограмм и $PE \parallel KT$.

б) Докажите, что $\Delta AEB = \Delta KTB$ и $AE = KT = PA$, т. е. A – середина PE.

4. Решение задач по готовым чертежам для подготовки к изучению нового материала (устная фронтальная работа).

Задача № 1. Рис. 5.85. *Найти:* x.

Ответ: $x = 85°$.

Задача № 2. Рис. 5.86. *Найти:* y.

Ответ: $y = 95°$.

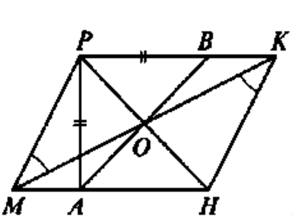


Рис. 5.82

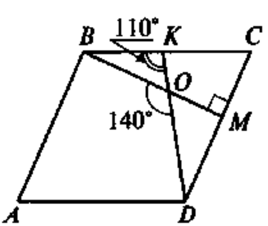


Рис. 5.83

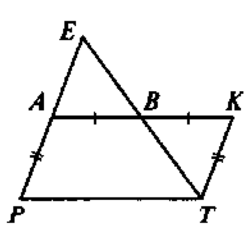


Рис. 5.84

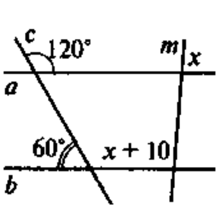


Рис. 5.85

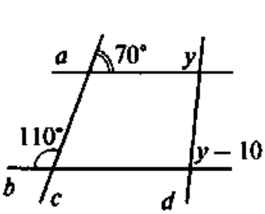


Рис. 5.86

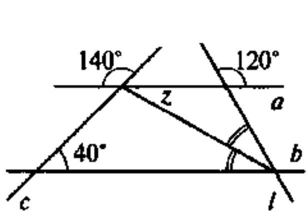


Рис. 5.87

Задача № 3. Рис. 5.87. *Найти:* z.

Ответ: $z = 30°$.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятия трапеция, основания трапеции, боковые стороны трапеции.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.88) и запись:

ABCD – трапеция, если $BC \parallel AD$.

AB и *CD* – боковые стороны.

BC и *AD* – основания.

2. Ввести понятия равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.89) и запись:

Равнобедренная трапеция.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.90) и запись:

Прямоугольная трапеция.

3. Ввести понятие средняя линия трапеции.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.91) и запись:

M – середина *AB*, *N* – середина *CD*, *MN* – средняя линия трапеции.

4. Исследование свойств равнобедренной трапеции (работа в группах).

(Учитель делит класс на группы. Результаты исследований выслушать и обсудить.)

Задание для первой группы. Исследовать углы равнобедренной трапеции.

Задание для второй группы. Исследовать диагонали равнобедренной трапеции.

Рис. 5.88

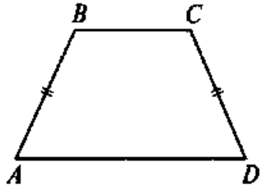


Рис. 5.89

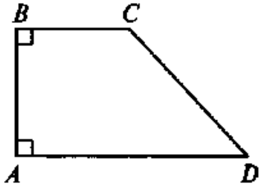


Рис. 5.90

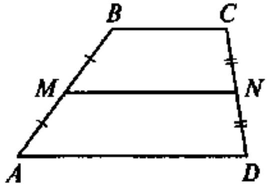


Рис. 5.91

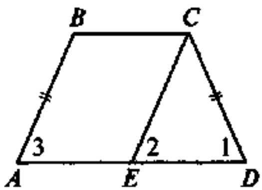


Рис. 5.92

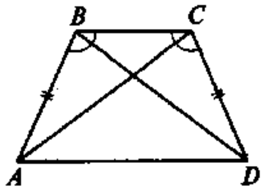


Рис. 5.93

На доске и в тетрадях рисунки и запись:

Свойства равнобедренной трапеции

1) В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны (рис. 5.92).

Доказательство: Проведем $CE \parallel AB$.

$ABCE$ – параллелограмм ($AB \parallel CE$, $BC \parallel AD$).

$CD = AB = CE$, ΔCDE – равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$.

$AB \parallel CE$, тогда $\angle 2 = \angle 3$; $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

$\angle ABC = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 1 = \angle BCD$.

2) В равнобедренной трапеции диагонали равны (рис. 5.93).

Доказательство: $\Delta ABC = \Delta DCB$ ($AB = DC$, BC – общая сторона, $\angle ABC = \angle DCD$), тогда $AC = BD$.

5. Изучение признаков равнобедренной трапеции.

Задание. Сформулируйте утверждения, обратные свойствам равнобедренной трапеции, и выясните их справедливость.

(Результаты работы выслушать и обсудить.)

На доске и в тетрадях рисунки и запись:

Признаки равнобедренной трапеции

1) Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная (рис. 5.94).

Доказательство: Проведем $CE \parallel AB$.

$ABCE$ – параллелограмм, тогда $AB = CE$, $\angle A = \angle CED$.

ΔCED – равнобедренный ($\angle D = \angle CED$), тогда $CE = CD$.

$AB = CE = CD$, тогда $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

2) Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная (рис. 5.95).

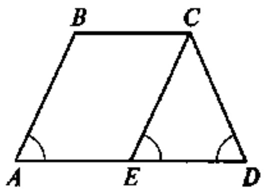


Рис. 5.94

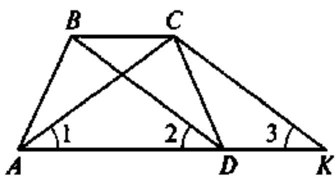


Рис. 5.95

Доказательство: Проведем $CK \parallel BD$.

$BCKD$ – параллелограмм ($CK \parallel BD$, $BC \parallel AK$). ΔACK – равнобедренный ($AC = BD = CK$), $\angle 1 = \angle 2$. $CK \parallel BD$, $\angle 2 = \angle 3$, тогда $\angle 1 = \angle 3$. $\Delta ABD = \Delta DCA$ ($AC = BD$, AD – общая сторона, $\angle 1 = \angle 3$), тогда $AB = CD$, т. е. $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

IV. Работа в рабочих тетрадях

Решить задачи № 16, 18 (самостоятельно).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Таким же образом проверяется решение задачи № 18.)

– Как вы считаете, верно ли решена задача?

– У кого другое решение?

Задача № 16. *Ответ:* $\angle M = 71°$, $\angle P = 143°$.

Задача № 18. *Ответ:* $AD = 22$ см.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Дайте определение трапеции. Как называются стороны трапеции? Какая трапеция называется равнобедренной Какая трапеция называется прямоугольной?
2. Что такое средняя линия трапеции?
3. Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.
4. Сформулируйте признаки равнобедренной трапеции.

Домашнее задание

1. П. 45, вопросы 10, 11 (учебник, с. 113).
2. Выучить признаки и свойства равнобедренной трапеции.
3. Решить задачи № 386, 387, 390.
4. Повторить задачу № 384 (устно).
5. Решить задачу № 17 (рабочая тетрадь).

Урок 9. Теорема Фалеса

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему Фалеса и закрепить ее в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач на применение свойств равнобедренной трапеции, ее признаков, а также на применение определения трапеции и ее свойств.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Какой четырехугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?

2) Какая трапеция называется прямоугольной? равнобедренной?

3) Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.

4) Сформулируйте признаки равнобедренной трапеции.

5) Что такое средняя линия трапеции? Сформулируйте свойство средней линии трапеции.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 387, 390. Два ученика готовят рисунки к задачам и записывают краткое решение. Заслушать их после теоретического опроса.)

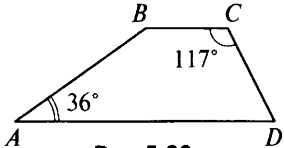


Рис. 5.96

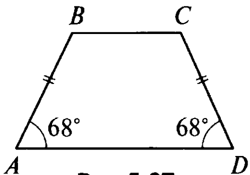


Рис. 5.97

Задача № 387 (рис. 5.96).

$\angle A + \angle B = 180°$;

$\angle C + \angle D = 180°$;

$\angle B = 144°$, $\angle D = 63°$.

Задача № 390 (рис. 5.97).

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$;

$\angle D = 68°$, $\angle B = 112°$, $\angle C = 112°$.

III. Решение задач по готовым чертежам

Решить задачи (самостоятельно с последующей взаимопроверкой).

(Учащиеся в тетрадях записывают только ответы или краткое решение.)

1. *Дано: ABCD* – трапеция (рис. 5.98).
Найти: $\angle AOB$.

2. *Дано: ABCD* – трапеция (рис. 5.99).
Найти: углы трапеции.

3. *Дано: ABCD* – трапеция, $BE \parallel CD$ (рис. 5.100).
Найти: углы трапеции.

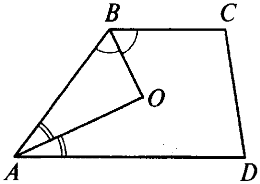


Рис. 5.98

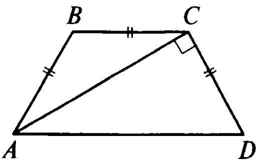


Рис. 5.99

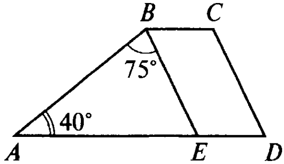


Рис. 5.100

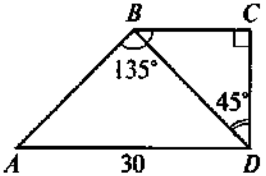


Рис. 5.101

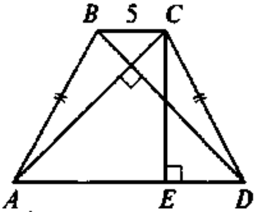


Рис. 5.102

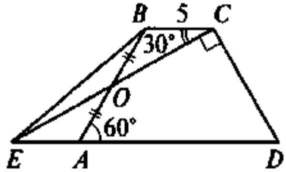


Рис. 5.103

4. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 5.101).
Найти: BC.
5. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AD = 15$ (рис. 5.102).
Найти: CE.
6. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AD = 15$ (рис. 5.103).
Найти: P_{ABCD}.
7. *Дано:* $ABCM$ – трапеция, $AM = 7$ (рис. 5.104).
Найти: CM.
8. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 5.105).
Найти: $\angle C$.
9. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 5.106).
Найти: AE и AD.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены восемь-девять задач;
- оценка «4» – правильно решены шесть-семь задач;
- оценка «3» – правильно решены три-пять задач;
- оценка «2» – правильно решено менее трех задач.

Ответы к задачам:

1. $\angle AOB = 90°$.
2. $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.
3. $\angle A = 40°$, $\angle D = 65°$, $\angle C = 115°$, $\angle B = 140°$.
4. $BC = 15$.
5. $CE = 10$.
6. $P_{ABCD} = 40$.

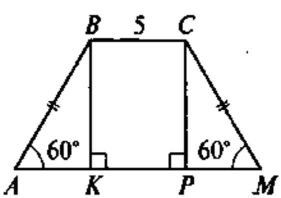


Рис. 5.104

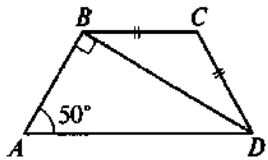


Рис. 5.105

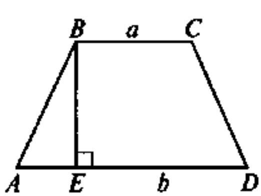


Рис. 5.106

7. $CM = 2$.

8. $\angle C = 100°$.

9. $AE = b - a$, $AD = 2b - a$.

IV. Работа по теме урока

1. Повторить решение задачи № 384 (устно).

2. Решить задачу № 385 (теорема Фалеса).

3. Решить задачи (устно).

1) *Дано:* $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$; $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$; $AB_4 = 20$ см (рис. 5.107).

Найти: B_2B_3.

2) *Дано:* $EF \parallel AC$ (рис. 5.108).

Найти: P_{ABC}.

3) *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 5.109).

Доказать: $AO = CO$.

4) *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $MK \parallel BE \parallel CD$, $AD = 16$ см (рис. 5.110).

Найти: AK.

V. Самостоятельная работа

(В зависимости от уровня подготовленности класса в целом и каждого ученика в отдельности, можно предложить задачи дифференцированно: менее подготовленным учащимся – задачи I уровня; учащимся с высоким уровнем подготовки – задачи III уровня; большей части класса – задачи II уровня. Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помощь учащимся, выбравшим трудный вариант (трудный

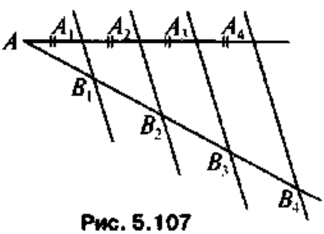


Рис. 5.107

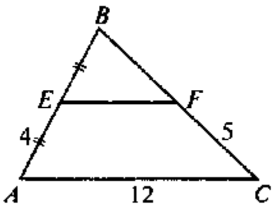


Рис. 5.108

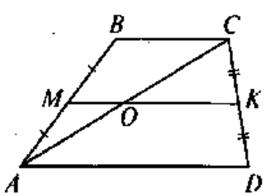


Рис. 5.109

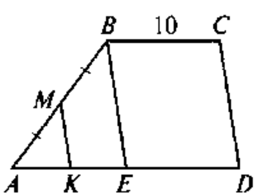


Рис. 5.110

для данного ученика). После окончания работы проводится самопроверка.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. В трапеции $ABCD$ BC – меньшее основание. На отрезке AD взята точка E так, что $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 70°$, $\angle BEA = 50°$. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.

Вариант 2

1. В трапеции $MHPK$ MK – большее основание. Прямые MH и PK пересекаются в точке E, $\angle MEK = 80°$, $\angle EHP = 40°$. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°. Большая боковая сторона и большее основание равны по 20 см. Найдите меньшее основание.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с боковой стороной угол в 120°. Боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции острый угол и угол, который составляет меньшая диагональ с меньшим основанием, равны 60°. Найдите отношение оснований.

Вариант 2

1. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, острый угол равен 45°. Найдите отношение оснований.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Из вершины тупого угла равнобедренной трапеции $ABCD$ проведен перпендикуляр CE к прямой AD, содержащей большее основание. Докажите, что $AE = \dfrac{(AD + BC)}{2}$.

2. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой

стороной угол в 60°. Докажите, что меньшая диагональ равна полусумме оснований трапеции.

Вариант 2

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние между прямыми AD и BC, содержащими основания, равно $\frac{(AD+BC)}{2}$.

2. Из вершины прямого угла меньшего основания прямоугольной трапеции под углом 45° к этому основанию проведен луч, который проходит через середину большей боковой стороны. Докажите, что меньшая боковая сторона этой трапеции равна сумме оснований.

Ответы и указания для самопроверки:

(Каждый ученик получает ответы и указания в распечатанном виде после того, как выполнит задание. Ученик сразу проверяет свою работу и выполняет работу над ошибками.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. $\angle A = 60°$, $\angle ABC = 120°$, $\angle D = \angle BEA = 50°$, $\angle C = 130°$ (рис. 5.111).

2. Проведите $CK \perp AD$, тогда $CK = 10$ см, $KD = 10$ см, $AK = 10$ см (рис. 5.112) (объясните). $AD = 10 + 10 = 20$ см.

Вариант 2

1. $\angle M = 40°$, $\angle MHP = 140°$, $\angle K = 60°$, $\angle HPK = 120°$ (рис. 5.113).

2. Проведите $BK \perp AD$, тогда $AK = 10$ см, $KD = 10$ см, $BC = 10$ см (рис. 5.114) (объясните).

II уровень сложности

Вариант 1

1. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. $\angle C = \angle ABC = 120° + \angle 1$ (рис. 5.115). $\angle C + \angle CDA = 180°$, тогда $\angle 1 + 120° + 2 \cdot \angle 1 = 180°$, $\angle 1 = 20°$, значит, $\angle A = \angle CDA = 40°$, $\angle ABC = \angle C = 140°$.

2. Докажите, что $\angle CAD = 60°$, ΔACD – равносторонний (рис. 5.116).

В ΔABC $BC = \frac{AC}{2} = \frac{AD}{2}$. Значит, $BC : AD = 1 : 2$.

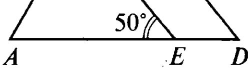


Рис. 5.111

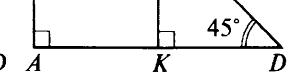


Рис. 5.112

Рис. 5.113

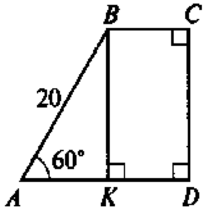


Рис. 5.114

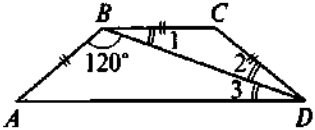


Рис. 5.115

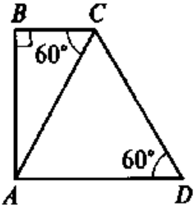


Рис. 5.116

Вариант 2

1. Докажите, что ΔBCK – равносторонний, тогда $\angle CBK = 60°$, $\angle KBA + \angle BAK = 120°$, $\angle KBA = \angle BAK = 60°$, значит, $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle ABC = \angle BCD = 120°$ (рис. 5.117).

2. Проведите $CK \perp AD$ и докажите, что $BC = AB = CK = AK = \dfrac{AD}{2}$ (рис. 5.118).

$BC : AD = 1 : 2$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Докажите, что $AK = ED$, тогда $AD = AK + KE + ED = 2 \cdot ED + BC$, $ED = (AD - BC) : 2$, значит, $AE = AD - DE = AD - (AD - BC) : 2 = (AD + BC) : 2$ (рис. 5.119).

2. $\angle ADO = \angle CBO = 30°$, $AD = 2 \cdot AO$, $BC = 2 \cdot CO$, $AC = AO + OC = AD : 2 + BC : 2 = (AD + BC) : 2$ (рис. 5.120).

Вариант 2

1. Докажите, что $\angle CAD = \angle BDA$ из равенства ΔCAD и ΔBDA, тогда $AO = OD$ и $OM = \dfrac{AD}{2}$, $BO = OC$ и $ON = BC$, значит, $MN = (AD + BC) : 2$ (рис. 5.121).

2. Докажите, что $BC = DM$, тогда в ΔABM. Значит, $AB = AM = AD + DM = AD + BC$ (рис. 5.122).

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;

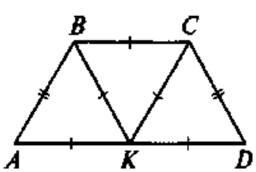


Рис. 5.117

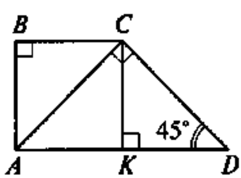


Рис. 5.118

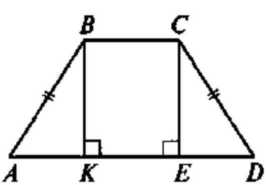


Рис. 5.119

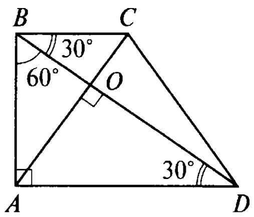


Рис. 5.120

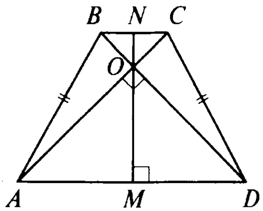


Рис. 5.121

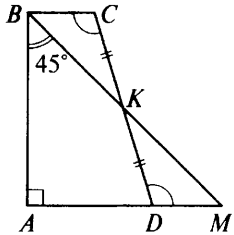


Рис. 5.122

- оценка «3» – правильно решены одна или две задачи, но в обеих задачах имеются ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельную работу.)

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая трапеция называется прямоугольной? Какая трапеция называется равнобедренной?
2. Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.
3. Сформулируйте признаки равнобедренной трапеции.
4. Что такое средняя линия трапеции? Сформулируйте свойство средней линии трапеции.
5. Сформулируйте теорему Фалеса.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 391, 392.
2. Выучить доказательство теоремы Фалеса по записям в тетради или используя задачи № 384, 385.
3. Решить дополнительную задачу.

В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

Урок 10. Решение задач на построение

Основные дидактические цели урока: совершенствовать навыки решения задач на построение; научить учащихся делить данный отрезок на *n* равных частей.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Работа у доски.

(Наиболее подготовленный ученик готовит у доски доказательство теоремы Фалеса. Заслушать после проверки домашнего задания.)

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель устно проверяет задачу № 392 (рисунок к задаче подготовить на доске заранее) и дополнительную задачу (решение подготовить на интерактивной доске заранее).)

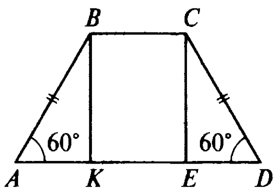


Рис. 5.123

Решение дополнительной домашней задачи: Проведем высоты $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, тогда в прямоугольном треугольнике ABK $\angle ABK = 30°$ и $AK = \frac{AB}{2}$, а в прямоугольном ΔDCE $\angle DCE = 30°$ и $DE = \frac{CD}{2}$ (рис. 5.123).

Так как $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$, кроме того, $BC \parallel AD$, так как $ABCD$ – трапеция, тогда $KBCE$ – параллелограмм и $BC = KE$.

Следовательно, $AD = AK + KE + DE = \frac{AB}{2} + BC + \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} + {}$ $+ BC + \frac{AB}{2} = AB + BC$, тогда $BC = AD - AB$.

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время проверки домашнего задания.)

I уровень сложности

1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $AD > BC$. На стороне AD отмечена точка K так, что $KBCD$ – параллелограмм. Периметр треугольника ABK равен 25 см, $DE = 6$ см. Найдите периметр трапеции.

2. *Дано:* $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 = 20$ см (рис. 5.124).

Найти: B_1B_4.

II уровень сложности

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне, $\angle A = 60°$, $AD = 15$ см, $BC = 10$ см. Найдите периметр трапеции.

2. *Дано:* ΔABC, $BM : MA = 1 : 2$, $MN \parallel AC$, $BC = 15$ см (рис. 5.125).

Найти: BN, NC.

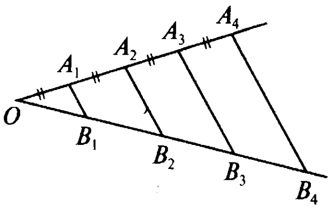


Рис. 5.124

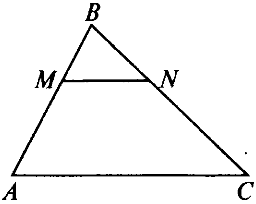


Рис. 5.125

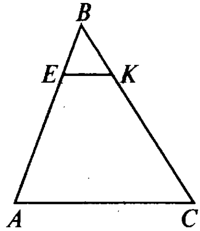


Рис. 5.126

III уровень сложности

1. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 20 см и 10 см. Через вершину C и середину AB проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AD в точке K. Известно, что $CK \perp CD$, $\angle BAD = 60°$, $\angle CKD = 30°$. Найдите периметр трапеции.

2. *Дано:* ΔABC, $BE : EA = 1 : 3$, $EK \parallel AC$, $P_{ABC} = 36$ см (рис. 5.126).

Найти: P_{BEK}.

3. Повторение простейших задач на построение (работа в парах).

Решить задачи на построение.

1) Построить середину данного отрезка.

2) Построить биссектрису данного угла.

3) Построить прямую, перпендикулярную данной.

4) Построить прямую, параллельную данной.

(По окончании работы учитель вызывает к доске учеников, желающих ответить.)

III. Работа по теме урока

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает одну из задач № 1–4. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс. Задачи № 5, 6 учащиеся в группах решают самостоятельно, при этом учитель оказывает необходимую помощь. Задачу № 7 решают всем классом.)

1. С помощью циркуля и линейки без делений, через точку M проведите прямую так, чтобы она пересекала отрезок AC в его середине (рис. 5.127).

2. С помощью циркуля и линейки разделите отрезки AE и DE на три равные части (рис. 5.128).

3. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок AB на 5 равных частей (рис. 5.129).

4. Как разделить данный отрезок на n равных частей?

5. Решить задачу № 19 (рабочая тетрадь).

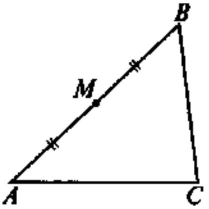


Рис. 5.127

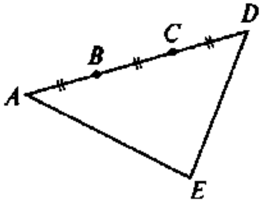


Рис. 5.128

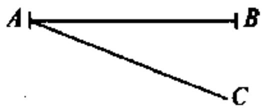


Рис. 5.129

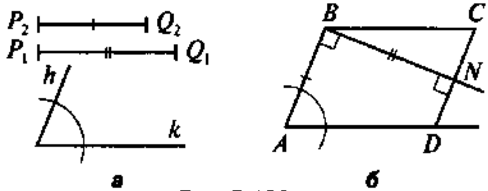


Рис. 5.130

6. Решить задачу № 20 (рабочая тетрадь).

7. Решить задачу № 395 (рис. 5.130).

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Построить: Параллелограмм $ABCD$ так, что $\angle A = \angle(hk)$, $AB = P_2Q_2$ и расстояние между AB и DC равно P_1Q_1.

Построение:

1) $\angle BAD = \angle(hk)$.

2) $AB = P_2Q_2$.

3) $BN \perp AB$, $BN = P_1Q_1$.

4) $CD \perp BN$.

5) $BC \parallel AD$.

6) $ABCD$ – искомый параллелограмм.

Доказательство: По построению $AB \parallel CD$, так как $AB \perp BN$ и $CD \perp BN$; $AD \parallel BC$, значит, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

8. Решить задачи № 397 (а, б) (самостоятельно с последующим обсуждением принципа построения).

Задача № 397 (а)

Дано: $\angle A = \alpha$, $AD = a$, $AB = b$ (рис. 5.131).

Построить: равнобедренную трапецию $ABCD$.

Построение:

1) На прямой c отложить отрезок $AD = a$.

2) Построить $\angle A = \alpha$, $\angle D = \alpha$.

3) На лучах AB и DC отложить отрезки, равные b ($AB = DC = b$).

4) Соединить B и C отрезком.

5) $ABCD$ – искомая трапеция.

Задача может не иметь решения, если точки B и C совместятся или точки B и C расположены за точкой пересечения лучей B и C.

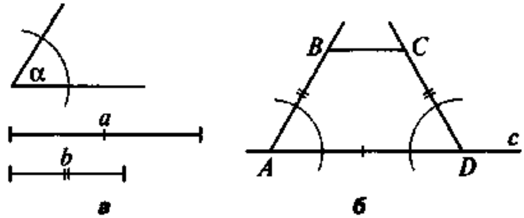


Рис. 5.131

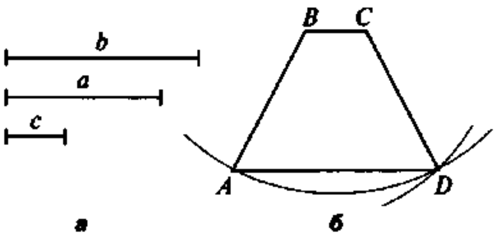


Рис. 5.132

Задача № 397 (б)

Дано: $AB = a$, $BD = b$, $BC = c$ (рис. 5.132).

Построить: Равнобедренную трапецию $ABCD$.

Построение: Так как трапеция равнобедренная, то $AB = CD$.

1) Построить отрезок $BC = c$.

2) Построить окружность с центром в точке C и радиусом a и окружность с центром в точке B и радиусом b. Точку их пересечения обозначить D.

3) Через точку D провести $DA \parallel BC$.

4) Построить окружность с центром в точке B и радиусом a. Эта окружность пересекает прямую AD в точке A.

5) $ABCD$ – искомая трапеция.

Задача не имеет решения, если один из отрезков a, b или c превосходит или равен сумме двух других.

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Как построить середину данного отрезка?
2. Как построить биссектрису данного угла?
3. Как построить прямую, перпендикулярную данной?
4. Как построить прямую, параллельную данной?
5. Как разделить отрезок на n равных частей?

Домашнее задание

1. Прочитать решение задач № 393 (в), 396.
2. Решить задачи № 393 (б), 394, 398.

Урок 11. Прямоугольник

Основные дидактические цели урока: повторить понятие прямоугольника, опираясь на имеющиеся у учащихся знания по данной теме; рассмотреть свойства прямоугольника как частного вида параллелограмма и научить учащихся применять их в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Практическое задание.

Разделить данный отрезок на 7 равных частей.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 393 (б), 398. Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать после выполнения практического задания.)

3. Решение задач по готовым чертежам проводится для подготовки учащихся к восприятию нового материала (устная фронтальная работа).

1) Найдите углы выпуклого четырехугольника, если их градусные меры пропорциональны числам 1, 2, 3, 4.

2) Докажите, что расстояния AM и CN от вершин A и C параллелограмма $ABCD$ до прямой BD равны (рис. 5.133).

3) Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A = 3 \cdot \angle B$.

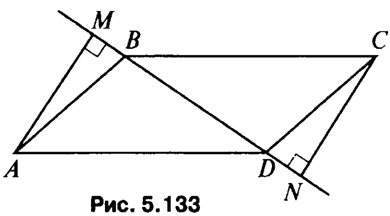


Рис. 5.133

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие прямоугольника.

(Учащиеся уже знакомы с этой фигурой, поэтому ввести понятие прямоугольника можно в процессе ответов на вопросы.)

– Какой четырехугольник называется прямоугольником? (*Это четырехугольник, у которого все углы прямые. Это четырехугольник, у которого противолежащие стороны равны.*)
– Можно ли утверждать, что прямоугольник – это параллелограмм? Почему?
– Чем отличается произвольный параллелограмм от прямоугольника?

– Закончите предложение: «Прямоугольник – это параллелограмм, у которого...».

– Сформулируйте свойства прямоугольника.

2. Рассмотреть особое свойство диагоналей прямоугольника (работа в группах).

Задание. Исследуйте свойства сторон, углов и диагоналей прямоугольника, используя свойства параллелограмма.

3. Рассмотреть признак прямоугольника.

– Как определить, является ли данный параллелограмм прямоугольником? Ответ обоснуйте.

Выберите верные утверждения.

1) Если в четырехугольнике диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник – прямоугольник.

2) Если в четырехугольнике противоположные стороны параллельны, а все его углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник.

3) Если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

4) Если в параллелограмме два угла прямых, то этот параллелограмм – прямоугольник.

5) Если в четырехугольнике два прямых угла и две стороны равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

6) Если в четырехугольнике диагонали равны, а один угол прямой, то этот четырехугольник – прямоугольник.

(Обсудить варианты ответов всем классом.)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить задачу № 23.)

Задача № 21. Ответ: $P_{ABCD} = 110$ см.

Задача № 23. Ответ: $\angle DAO = 20°$.

2. Решить задачу № 401 (б).

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 401 (б)

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, AK – биссектриса $\angle A$ и делит CD на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм (рис. 5.134).

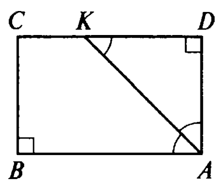


Рис. 5.134

Найти: P_{ABCD}.

Решение: Так как AK – биссектриса $\angle A$, то $\angle BAK = \angle KAD = 45°$ (так как $\angle A = 90°$). ΔADK – прямоугольный, $\angle AKD = 90 - \angle KAD = 45°$, тогда ΔADK – равнобедренный, значит, $AD = KD$.

Возможны случаи:

а) Если $KD = 2{,}7$ дм, $CK = 4{,}5$ дм, то $AD = KD = 2{,}7$ дм; $DC = DK + CK = 2{,}7 + 4{,}5 = 7{,}2$ дм.

Тогда $P_{ABCD} = 2 \cdot (2{,}7 + 7{,}2) = 19{,}8$ дм.

б) Если $KD = 4{,}5$ дм, $CK = 2{,}7$ дм, то $AD = KD = 4{,}5$ дм, $DC = 7{,}2$ дм. Тогда $P_{ABCD} = 23{,}4$ дм.

Ответ: 19,8 дм или 23,4 дм.

Наводящие вопросы.

– Биссектриса AK отсекает от прямоугольника треугольник AKD. Что можно сказать об этом треугольнике?

– Сколько решений имеет задача?

3. Решить самостоятельно задачи № 400, 402, 403 (к задачам № 400, 402 записать краткое решение, к задаче № 403 – полное решение).

Задача № 403

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AC \cap BD = O$, $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см (рис. 5.135).

Найти: P_{AOB}.

Решение: ΔACD – прямоугольный, в нем $\angle CAD = 30°$, значит, $CD = \dfrac{AC}{2} = 6$ см, тогда $AB = CD = 6$ см.

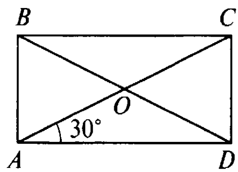


Рис. 5.135

В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = BO = 6$ см.

$P_{AOB} = AO + BO + AB = 6 + 6 + 6 = 18$ см.

Ответ: $P_{AOB} = 18$ см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решены одна или две задачи, но в обеих задачах имеются ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой четырехугольник называется прямоугольником?

2. Сформулируйте свойства прямоугольника.
3. Сформулируйте признаки прямоугольника.

Домашнее задание

1. П. 46, вопросы 12, 13 (учебник, с. 114).
2. Решить задачи № 399, 401 (а), 404.
3. Решить задачу № 22 (рабочая тетрадь).

Задача № 22

Решение:

а) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$ (рис. 5.136), поэтому $\angle D = 30°$, и по свойству катета, лежащего против угла в 30°, имеем $BD = 2 \cdot AB = 24$ см.

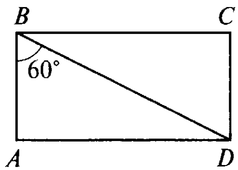


Рис. 5.136

б) Так как в прямоугольнике диагонали равны, то $AC = BD = 24$ см.

Ответ: $AC = 24$ см.

4. Решить дополнительную задачу.

Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Урок 12. Ромб. Квадрат

Основные дидактические цели урока: ввести понятия ромба и квадрата как частных видов параллелограмма; рассмотреть свойства и признаки ромба и квадрата и показать их применение в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение дополнительной задачи (рис. 5.137). Справившийся с решением ученик заранее готовит решение на доске.)

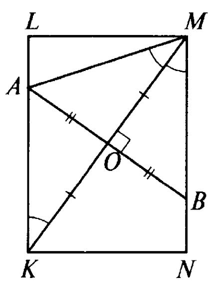


Рис. 5.137

1. Прямоугольные ΔMOB и ΔKOA равны по катету и прилежащему к нему острому углу ($KO = MO$, так как O – середина диагонали KM; $\angle BMO = \angle AKO$ как накрест лежащие при

параллельных прямых KL и MN и секущей KM), тогда $AO = OB =$ $= 3$ см ($AB = 6$ см), $AK = MB = 6$ см.

2. $\Delta AMO = \Delta BMO$ по двум катетам ($AO = BO$, MO – общая сторона, $\angle AOM = \angle MOB = 90°$), тогда $AM = MB = 6$ см и ΔAMB – равносторонний.

3. $\angle AMO = \angle BMO = 30°$, так как ΔAMB – равносторонний, MO – медиана, высота и биссектриса ΔAMB.

4. $\angle KLM = 90°$, $\angle AMO = 30°$, $\angle\Delta BMO = 30°$, тогда $\angle AML = 30°$.

5. ΔALM – прямоугольный, в нем $\angle AML = 30°$, $AM = 6$ см, тогда $AL = 3$ см.

6. $AK = 6$ см, $AL = 3$ см, тогда $KL = 9$ см.

Ответ: $KL = 9$ см.

III. Решение задач

I уровень сложности: решить задачи по готовым чертежам (устная фронтальная работа с менее подготовленными учащимися для лучшего восприятия нового материала).

II уровень сложности: решить задачи самостоятельно с последующей самопроверкой.

(Решение задачи II уровня сложности учитель готовит заранее. Ученик, решивший задачу, получает решение задачи у учителя и самостоятельно проверяет.)

Решить задачи по готовым чертежам.

I уровень сложности

1. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 5.138).
Найти: $\angle ABE$.

2. *Дано:* $ACEK$ – прямоугольник, $BC = 5$ см (рис. 5.139).
Найти: P_{BDFM}.

3. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 5.140).
Доказать: $AM = ND$.

4. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 5.141).
Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$.

5. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 5.142).
Найти: AC, AB.

6. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 5.143).
Найти: AD.

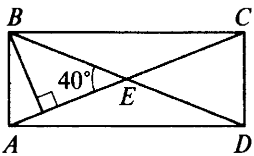


Рис. 5.138

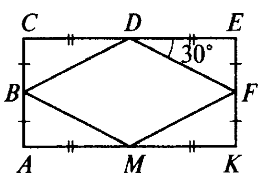


Рис. 5.139

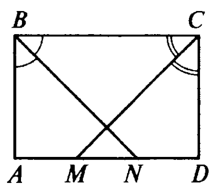


Рис. 5.140

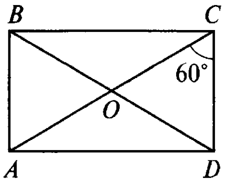


Рис. 5.141

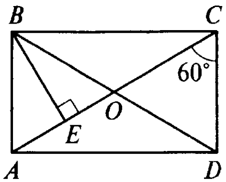


Рис. 5.142

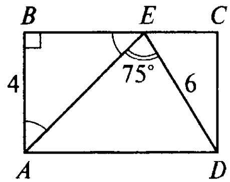


Рис. 5.143

II уровень сложности

Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом 60°. Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.

Решение:

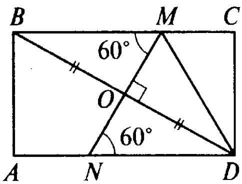


Рис. 5.144

1) $\Delta BMO = \Delta DNO$ (рис. 5.144) по катету и прилежащему к нему острому углу ($BO = DO$, $\angle MBO = \angle NDO = 30°$), тогда $OM = ON = \dfrac{MN}{2} = 10 : 2 = 5$ см.

2) ΔBOM – прямоугольный, в нем $BM = 2 \cdot OM = 2 \cdot 5 = 10$ см.

3) Прямоугольные треугольники BMO и DOM равны по двум катетам, тогда $DM = BM = 10$ см, $\angle DMO = \angle BMO = 60°$, откуда $\angle BMD = 120°$, $\angle DMC = 60°$.

4) В прямоугольном ΔDMC $\angle DMC = 60°$, $\angle MDC = 30°$, $MD = 10$ см, тогда $MC = 5$ см.

5) $BC = BM + MC = 10 + 5 = 15$ см.

Ответ: 15 см.

IV. Работа по теме урока

1. Ввести понятие ромба.

(Учащиеся уже знакомы с этой фигурой, поэтому ввести понятие ромба можно в процессе ответов на вопросы.)

– Какая геометрическая фигура называется ромбом?

– Что можно сказать о сторонах ромба?

– Параллельны ли противолежащие стороны ромба?

– Можно ли утверждать, что ромб – это параллелограмм, прямоугольник? Обоснуйте свой ответ.

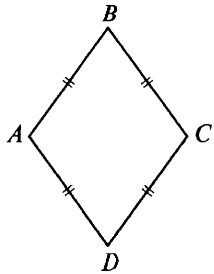


Рис. 5.145

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.145) и запись:

$ABCD$ – ромб, если $ABCD$ – параллелограмм и $AB = BC = CD = DA$.

– Верно ли утверждение: «Четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом»?

2. Ввести понятие о свойствах и признаках ромба (работа в группах).

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Задание для первой группы. Перечислите все свойства ромба как частного вида параллелограмма.

Задание для второй группы. Выясните, каким еще свойством обладают диагонали ромба, кроме того, что они точкой пересечения делятся пополам.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.146) и запись:

Свойства ромба

Если $ABCD$ – ромб, то:

а) $AB = BC = CD = AD$.

б) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

в) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

г) $AO = OC$, $BO = OD$.

д) $AC \perp BD$.

AO, BO, CO, DO – биссектрисы углов A, B, C, D.

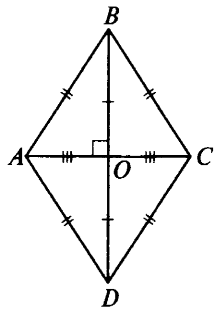


Рис. 5.146

3. Ввести определение квадрата (фронтальная работа).

(Учащиеся уже знакомы с этой фигурой, поэтому ввести понятие квадрата можно в процессе ответов на вопросы.)

Задание. Сформулируйте утверждение, обратное особому свойству ромба, и выясните его справедливость.

– Какая геометрическая фигура называется квадратом?

– Что можно сказать о сторонах и углах квадрата?

– Можно ли утверждать, что квадрат – это параллелограмм, прямоугольник, ромб? Обоснуйте свой ответ.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.147) и запись:

$ABCD$ – квадрат, если $ABCD$ – прямоугольник и $AB = BC = CD = DA$.

– Верно ли утверждение: «Ромб, у которого все углы прямые, является квадратом?»

– Верно ли утверждение: «Параллелограмм, у которого все стороны и все углы равны, является квадратом?»

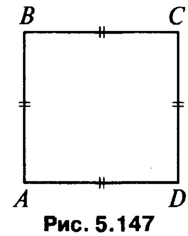


Рис. 5.147

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Задание для первой группы. Перечислите свойства квадрата, учитывая, что квадрат – это частный вид прямоугольника и ромба.

Задание для второй группы. Сформулируйте признаки квадрата.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 5.148) и запись:

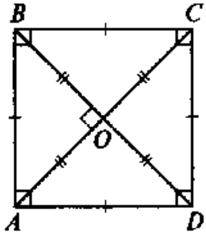


Рис. 5.148

Свойства квадрата

а) $AB = BC = CD = AD$; $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

б) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

в) $BO = CO = DO = AO$, $BD \perp AC$.

AO, BO, CO, DO – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ соответственно.

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

(Учащиеся самостоятельно решают задачу № 24, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

Ответ к задаче № 24: $P_{ABCD} = 60$ см.

2. Решить задачу № 406.

(Один ученик работает у доски, остальные — в тетрадях.)

Задача № 406

Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle B = 60°$, $AC = 10,5$ см (рис. 5.149).

Найти: P_{ABCD}.

Решение: $\angle B = 60°$, $AB = BC$ (так как AB и BC стороны ромба), тогда $\angle BAC = \angle BCA = 60°$, т. е. ΔABC – равносторонний и $AB = AC = 10,5$ см. У ромба все стороны равны, поэтому $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10,5 = 42$ см.

Ответ: 42 см.

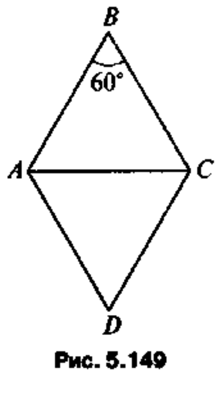


Рис. 5.149

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольнике ABC? Почему?

– Чему равен периметр ромба?

3. Решить задачи № 407, 412, дополнительную задачу (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 407

Решение: $\angle ABC = 45°$ (рис. 5.150). BD – диагональ и биссектриса $\angle ABC$. $\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot 45° = 22°30'$.

Из ΔABO: $\angle O = 90°$, так как диагонали ромба перпендикулярны.

$\angle OAB = 90° - 22°30' = 67°30'$.

Ответ: $22°30'$, $67°30'$.

Наводящие вопросы.

– Как найти угол между стороной AB и диагональю BD? Почему? А между стороной BC и диагональю BD?
– Какие еще углы равны двум предыдущим?
– Что можно сказать о треугольнике AOB?
– Как можно вычислить $\angle OAB$?
– Чему равны углы между сторонами ромба и диагональю AC?

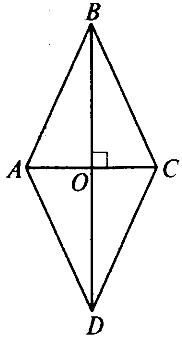


Рис. 5.150

Задача № 412

Решение: ΔABC – равнобедренный (рис. 5.151), значит, $\angle A = \angle B = 45°$. В ΔADE $\angle D = 90°$, $\angle A = 45°$, тогда $\angle E = 45°$, следовательно, ΔADE – равнобедренный, т. е. $AD = DE$.

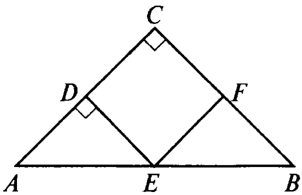


Рис. 5.151

$CDEF$ – квадрат, следовательно, $CD = DE = EF = FC$. Так как $AC = 12$ см, $DE = AD = CD$, то $CD = 6$ см, следовательно, $P_{CDEF} = 4 \cdot CD = 24$ см.

Ответ: 24 см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольнике ADE?
– Как найти сторону квадрата $CDEF$?

Дополнительная задача

Перпендикуляр, опущенный из вершины угла A прямоугольника $ABCD$ на не проходящую через эту вершину диагональ, делит ее в отношении $1 : 3$, считая от вершины B. Диагональ прямоугольника равна 8 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны.

Решение: $BK : KD = 1 : 3$, $BD = 8$ см (рис. 5.152), следовательно, $BK = 2$ см. Так как $BO = \frac{1}{2} \cdot BD = 4$ см, то $KO = BO - BK = 2$ см, т. е. $BK = KO$.

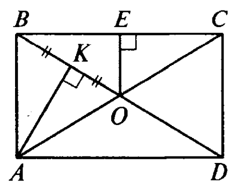


Рис. 5.152

$\Delta ABK = \Delta AOK$ по двум сторонам и углу между ними ($BK = KO$, AK – общая сторона, $\angle BKA = \angle OKA = 90°$), тогда $AB = AO =$

$= BO = 4$ см, следовательно, ΔAOB – равносторонний, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.

В ΔOBE $\angle E = 90°$, $\angle OBE = \angle ABC - \angle ABO = 90° - 60° = 30°$, следовательно, $OE = \frac{1}{2} \cdot BO = 2$ см.

Ответ: 2 см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой четырехугольник называется ромбом? Какой четырехугольник называется квадратом?
2. Сформулируйте свойства ромба. Сформулируйте свойства квадрата.
3. Сформулируйте признаки ромба. Сформулируйте признаки квадрата.
4. Можно ли утверждать, что ромб – это прямоугольник, параллелограмм, квадрат? Можно ли утверждать, что квадрат – это прямоугольник, параллелограмм, ромб?

Домашнее задание

1. П. 47, вопросы 14, 15 (учебник, с. 114).
2. Решить задачи № 405, 409, 411.
3. Решить дополнительную задачу.

На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ – ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника равна 3.

Урок 13. Решение задач по теме «Прямоугольник. Ромб. Квадрат»

Основные дидактические цели урока: закрепить теоретический материал по теме «Прямоугольник. Ромб. Квадрат»; совершенствовать навыки решения задач по теме.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Теоретическая самостоятельная работа

Заполните таблицу, отметив знаки «+» (да) и «–» (нет).

Вопросы для сравнения	Параллелограмм	Прямоугольник	Ромб	Квадрат
1. Противолежащие стороны параллельны и равны				
2. Все стороны равны				
3. Противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°				
4. Все углы прямые				
5. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам				
6. Диагонали равны				
7. Диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов				

(После окончания взаимопроверки выполняется самооценка по готовым ответам.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – ошибок нет или допущена одна ошибка;
- оценка «4» – допущены две ошибки;
- оценка «3» – допущены шесть-десять ошибок;
- оценка «2» – допущено более десяти ошибок.

Правильные ответы:

	Параллелограмм	Прямоугольник	Ромб	Квадрат
1	+	+	+	+
2	–	–	+	+
3	+	+	+	+
4	–	+	–	+
5	+	+	+	+
6	–	+	–	+
7	–	–	+	+

III. Проверочный тест

(Тесты в двух вариантах в распечатанном виде учитель раздает учащимся. Учащиеся записывают ответы на листочках и в тетрадях: листочки сдать на проверку учителю; ответы в тетради проверить по заранее подготовленным ответам.)

Вариант 1

1. Любой прямоугольник является:

а) ромбом;

б) квадратом;

в) параллелограммом;

г) нет правильного ответа.

2. Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то этот четырехугольник:

а) ромб;

б) квадрат;

в) прямоугольник;

г) нет правильного ответа.

3. Ромб – это четырехугольник, в котором:

а) диагонали точкой пересечения делятся пополам и равны;

б) диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;

в) противолежащие углы равны, а противолежащие стороны параллельны;

г) нет правильного ответа.

Вариант 2

1. Любой ромб является:

а) квадратом;

б) прямоугольником;

в) параллелограммом;

г) нет правильного ответа.

2. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм:

а) ромб;

б) квадрат;

в) прямоугольник;

г) нет правильного ответа.

3. Прямоугольник – это четырехугольник, в котором:

а) противолежащие стороны параллельны, а диагонали равны;

б) диагонали точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов;

в) два угла прямые и две стороны равны;

г) нет правильного ответа.

Ответы к тесту:

Вариант 1: 1 – в; 2 – г; 3 – б.

Вариант 2: 1 – в; 2 – а; 3 – а.

Критерии оценивания:

- оценка «5» – нет ошибок;
- оценка «4» – допущена одна ошибка;
- оценка «3» – допущены две ошибки;
- оценка «2» – допущены три ошибки.

IV. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение дополнительной задачи. Ученик заранее готовит решение на доске. Заслушать после выполнения проверочного теста.)

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 3$, $K \in AB$, $M \in CD$, $\angle KAC = 30°$, $AKCM$ – ромб.

Найти: AK.

Решение:

а) $AKCM$ (рис. 5.153) – ромб, тогда $AK = KC$, ΔAKC – равнобедренный, значит, $\angle KCA = \angle KAC = 30°$, $\angle AKC = 120°$, $\angle BKC = 60°$.

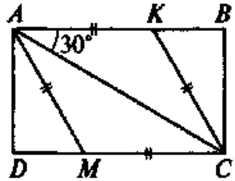


Рис. 5.153

б) ΔKBC – прямоугольный, в нем $\angle BKC = 60°$, $\angle KCB = 30°$, тогда $KB = \frac{KC}{2} = \frac{AK}{2}$.

в) Так как $KB = \frac{AK}{2}$, $AB = AK + KB = AK + \frac{AK}{2} = 3 \cdot \frac{AK}{2} = 3$, то $AK = 2$.

Ответ: $AK = 2$.

Контролирующие вопросы.

– Зачем нужно находить $\angle BKC$?

– Почему $KB = \frac{1}{2} \cdot AK$?

– Почему $AB = \frac{3}{2} \cdot AK$?

V. Решение задач

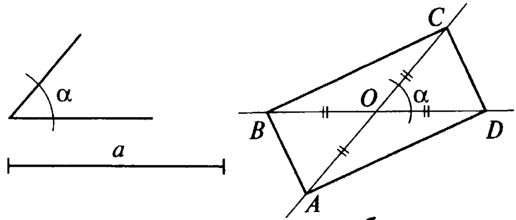
1. Решить задачу № 413 (в).

Задача 413 (в)

Дано: α – угол между диагоналями, a – диагональ прямоугольника (рис. 5.154 (а)).

Построить: прямоугольник.

Анализ (проводится в виде беседы учителя с учащимися):



а *б*

Рис. 5.154

Предположим, такой прямоугольник построен. Назовем его $ABCD$, в нем $AC = BD = a$, $\angle COD = \alpha$.

Составьте план построения искомого прямоугольника.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Построение:

1) В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам (рис. 5.154 (б)).

2) Построить угол α с вершиной в точке O и, продлив каждую из сторон, отложить во все стороны отрезки, равные половине диагонали.

3) $ABCD$ – искомый прямоугольник.

2. Решить задачи № 414 (а), 413 (б) (самостоятельно).

VI. Самостоятельная работа

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь. По окончании работы проводится самопроверка. Самопроверку можно осуществить следующим образом: ***первый способ*** – заранее подготовить решение на распечатанных листочках и по окончании работы раздать их каждому ученику, ученик проверяет свое решение, исправляет ошибки; *второй способ* – по окончании работы объявить ответы к задачам, ученик должен найти свои ошибки.)

I уровень сложности

1. Найдите углы ромба, если его диагонали составляют с его стороной углы, один из которых на 30° меньше другого.

2. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.

II уровень сложности

1. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол ANB, если $\angle AMC = 120°$.

2. Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки

пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.

Решение задач самостоятельной работы:

I уровень сложности

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны (рис. 5.155), поэтому ΔAOB – прямоугольный. Пусть в ΔAOB $\angle ABO = x$, тогда $\angle BAO = x + 30°$, значит, $\angle ABO + \angle BAO = x + x + 30° = 90°$ и $x = 30°$. $\angle ABO = 30°$, $\angle BAO = 60°$, а так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то $\angle BAD = 120°$, $\angle ABC = 60°$. Поскольку противолежащие углы в ромбе равны, то $\angle ADC = \angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle BAD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

2. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам (рис. 5.156), значит, $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AC}{2} = AO$ и ΔAOB – равнобедренный, тогда $\angle OAB = \angle OBA = 50°$. В прямоугольнике все углы прямые, значит, $\angle OAD = \angle BAD - \angle OAB = 90° - 50° = 40°$.

Ответ: 50°, 40°.

II уровень сложности

1. В ромбе противолежащие углы равны и диагонали являются биссектрисами его углов (рис. 5.157), т. е. $\angle BAC = \angle BAD : 2 = \angle BCD : 2 = \angle BCA$. Так как AM – биссектриса $\angle BAC$, а $\angle BAC = \angle BCA$, то $\angle MAC = \angle MCA : 2$.

В ΔAMC $\angle MAC + \angle MCA = 180° - \angle AMC = 180° - 120° = 60°$. $\angle MAC = \angle MCA : 2$, тогда $\angle MAC = 20°$, $\angle BAC = 40°$. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, ΔAOB – прямоугольный, $\angle ABO = 90° - \angle BAO = 50°$. В ΔABN $\angle BAN = \angle MAC = 20°$, $\angle ABN = 50°$, тогда $\angle ANB = 180° - (20° + 50°) = 110°$.

Ответ: $\angle ANB = 110°$.

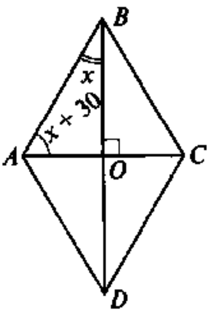


Рис. 5.155

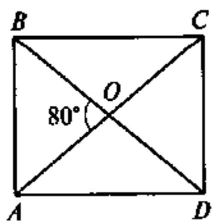


Рис. 5.156

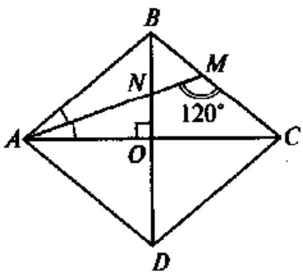


Рис. 5.157

2. $\Delta BMO = \Delta DKO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BO = DO$, $\angle MBO = \angle KDO = 45°$, $\angle BOM = \angle DOK$) (рис. 5.158), тогда $BM = KD$, значит, $AM = CK$ ($AM = AB - BM$, $CK = CD - KD$, $BM = KD$, $AB = CD$), $OM = OK$. Из равенства ΔCON и ΔAOP аналогично получаем $CN = AP$, $BN = PD$, $ON = OP$. В четырехугольнике $MNKP$ диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам ($OM = OK$, $ON = OP$), тогда $MNKP$ – ромб.

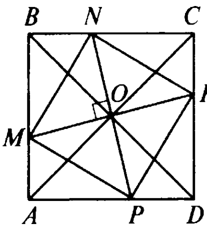


Рис. 5.158

$\Delta AMO = \Delta DOP = \Delta COK = \Delta BON$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OD = OC = OB$, $AM = PD = KC = BN$, $\angle MAO = \angle PDO = \angle KCO = \angle NBO$), тогда $MO = PO = OK = NO$.

В ромбе $MNKP$ диагонали равны ($MK = MO + OK = NO + PO = NP$), значит, $MNKP$ – квадрат.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за теоретическую самостоятельную работу, проверочный тест и самостоятельную работу.)

VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой четырехугольник называется ромбом? Какой четырехугольник называется квадратом?
2. Сформулируйте свойства ромба. Сформулируйте свойства квадрата.
3. Сформулируйте признаки ромба. Сформулируйте признаки квадрата.

Домашнее задание

1. Изучить самостоятельно п. 48, вопросы 16–20 (учебник, с. 114).
2. Решить задачи № 410, 413 (а), 415 (б).
3. Решить дополнительную задачу.

Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

Урок 14. Осевая и центральная симметрии

Основные дидактические цели урока: рассмотреть осевую и центральную симметрии как свойства некоторых геометрических фигур; научить учащихся строить симметричные точки и распознавать фигуры, обладающие осевой симметрией и центральной симметрией; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель индивидуально проверяет задачи № 415 (б), 413 (а), 410 и дополнительную задачу во время решения задач по готовым чертежам.)

Решение дополнительной домашней задачи: Поскольку биссектрисы смежных углов параллелограмма пересекаются под прямым углом, в пересечении образуется прямоугольник (рис. 5.159). Опустим из вершин B и C прямоугольника $ABCD$ перпендикуляры BK и CM на биссектрисы углов D и A соответственно.

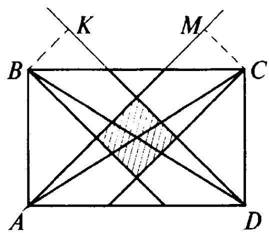


Рис. 5.159

Из равенства прямоугольных треугольников AMC и DKB по гипотенузе и острому углу следует, что $MC = KB$. Длины этих отрезков – это расстояния между биссектрисами противоположных углов данного прямоугольника, т. е. длины сторон прямоугольника, образованного пересечениями биссектрис. Следовательно, стороны полученного прямоугольника равны между собой, т. е. это квадрат.

2. Решение задач по готовым чертежам.

1) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 5.160).
Найти: $MD + DN$.

2) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 5.161).
Найти: $\angle CBE$.

3) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 5.162).
Найти: $\angle BAD$.

4) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 5.163).
Найти: $\angle ABC$.

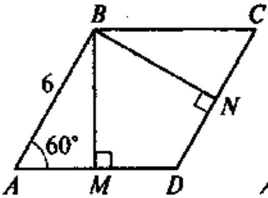


Рис. 5.160

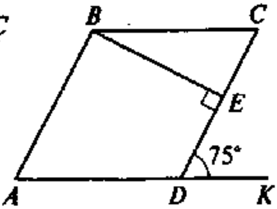


Рис. 5.161

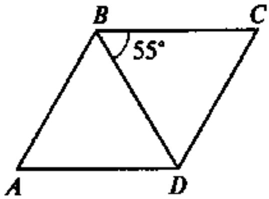


Рис. 5.162

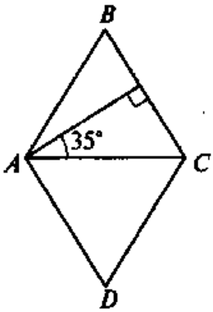


Рис. 5.163

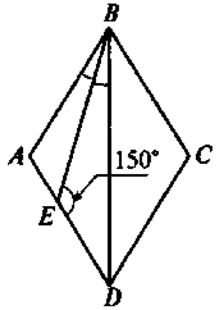


Рис. 5.164

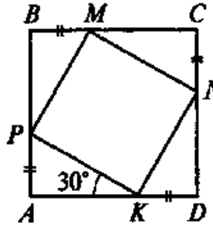


Рис. 5.165

5) *Дано: ABCD* – ромб (рис. 5.164).
Найти: $\angle C$.
6) *Дано: ABCD* – квадрат, $PK = 2$ см, $AK = \sqrt{3}$ см (рис. 5.165).
Найти: P_{ABCD}.
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $MD + DN = 6$ см.
2) $\angle CBE = 15°$.
3) $\angle BAD = 70°$.
4) $\angle ABC = 70°$.
5) $\angle C = 140°$.
6) $P_{ABCD} = 4 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решены шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «3» – правильно решены три задачи;
- оценка «2» – правильно решено менее трех задач.

III. Работа по теме урока

1. Обсуждение темы «Осевая и центральная симметрии» проводится по вопросам 16–20 (с. 114).

2. Закрепление темы «Осевая и центральная симметрии».

1) Решить самостоятельно задачи № 25, 26 (рабочая тетрадь).

2) Решить задачи № 418, 423 (устно).

3) Решить задачи № 416, 421.

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

4) Решить задачи № 417, 422 (устно).

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. E – середина стороны AB, $\angle BAC = 50°$. Найдите угол EOD.

2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle A = 31°$. Найдите углы треугольника BOC.

3. Дан отрезок, равный перпендикуляру, опущенному из вершины некоторого квадрата на диагональ. Постройте этот квадрат.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O. Отрезок OA является высотой треугольника MOP, $\angle AOP = 15°$. Найдите $\angle OHK$.

2. В ромбе $MPKH$ диагонали пересекаются в точке E. Один из углов треугольника PKE равен $16°30'$. Найдите углы PKE, PKH и угол PMH.

3. Дан отрезок, равный перпендикуляру, проведенный из точки пересечения диагоналей некоторого квадрата на его сторону. Постройте этот квадрат.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольнике $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей, BH и DE – высоты треугольников ABO и COD соответственно, $\angle BOH = 60°$, $AH = 5$ см. Найдите OE.

2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. OM, OK, OE – перпендикуляры, опущенные на стороны AB, BC, CD соответственно. Докажите, что $OM = OK$, и найдите сумму углов MOB и COE.

3. Внутри данного острого угла постройте квадрат с данной стороной так, чтобы две вершины квадрата принадлежали одной стороне угла, а третья – другой.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $MPKH$ O – точка пересечения диагоналей, PA и HB – перпендикуляры, проведенные из вершин P и H к прямой MK. Известно, что $MA = OB$. Найдите угол POM.

2. В ромбе $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O. На сторонах MK, KH, PH взяты точки A, B, C соответственно, $AK = KB = PC$. Докажите, что $OA = OB$, и найдите сумму углов POC и MOA.

3. Постройте квадрат по данной диагонали так, чтобы две противоположные вершины этого квадрата лежали на разных сторонах данного острого угла.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и K – середины сторон AB и AD соответственно. На прямой AC взята точка P, на прямой BD – точка E, $MP \perp AC$, $KE \perp BD$. Известно, что $4KE = AD$. Найдите отношения сторон $AP : PC$.

2. В ромбе $ABCD$ угол B тупой. На стороне AD взята точка K, $BK \perp AD$. Прямые BK и AC пересекаются в точке O, $AC = 2BK$. Найдите угол AOB.

3. Постройте прямоугольник по углу между стороной и диагональю к перпендикуляру, проведенному из вершины прямоугольника к прямой, содержащей эту диагональ.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $MPKH$ O – точка пересечения диагоналей. Точки A и B – середины сторон MP и MH соответственно. Точка C делит отрезок MK в отношении 1 : 7, считая от точки M, $AC \perp MK$. Найдите отношение $BO : PH$.

2. В ромбе $MPHK$ угол M острый. Отрезок PE является перпендикуляром к прямой MK, O – точка пересечения диагоналей, T – общая точка прямых PE и MH, $\angle MTP = 120°$, $OH = a$. Найдите PE.

3. Постройте ромб по острому углу и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба.

V. Рефлексия учебной деятельности

Какие из четырехугольников (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция) имеют центр симметрии (ось симметрии)?

Домашнее задание

Решить задачи.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Смежные стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см. Найдите разность периметров ΔAOB и ΔAOD.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол C равен 45°. Диагональ BD перпендикулярна AB и равна 7 см. Найдите DC.

3. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 9 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямые BC и AD соответственно.
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке N_1. На прямых AB и CD взяты точки F и Q так, что B лежит между A и F, а C между D и Q. Биссектрисы углов FBC и BCQ пересекаются в точке N_2. Длина отрезка N_1N_2 равна 12 см. Найдите длину BN_2, если $\angle BN_1C = 60°$.

Урок 15. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Основные дидактические цели урока: закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1—4. Ученик знакомит класс с решением задачи, используя подготовленный заранее рисунок. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить оставшиеся задачи.)

1) В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам (рис. 5.166), т. е. $BO = DO$, $AO = CO$, тогда $P_{AOD} - P_{AOB} = (AD + AO + DO) - (AB + AO + BO) = (AD - AB) + (AO - AO) + (DO - BO) = AD - AB = 15 - 10 = 5$ см.

Ответ: 5 см.

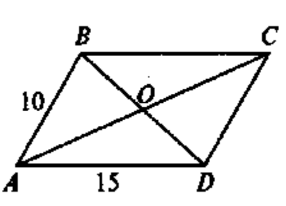


Рис. 5.166

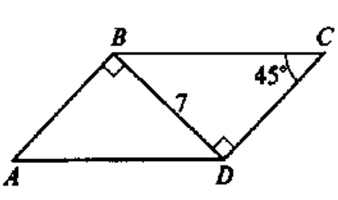


Рис. 5.167

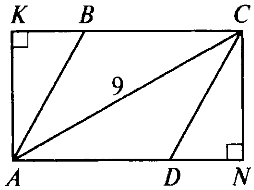


Рис. 5.168

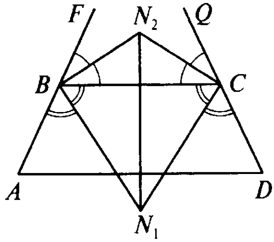


Рис. 5.169

2) Так как $BD \perp AB$, а $AB \parallel DC$ как противоположные стороны параллелограмма (рис. 5.167), то $BD \perp DC$, тогда ΔBDC – прямоугольный, $\angle DBC = 90° - \angle C = 45°$. $\angle DBC = \angle C$, значит, ΔDBC – равнобедренный и $DC = BD = 7$ см.

Ответ: 7 см.

3) В параллелограмме $ABCD$ $AD \parallel BC$ (рис. 5.168). $AK \perp BC$, значит, $AK \perp AD$, тогда $\angle KAN = 90°$. $CN \perp AD$, следовательно, $CN \perp BC$, тогда $\angle KCN = 90°$.

$AKCN$ – параллелограмм ($AD \parallel BC$, $AK \parallel CN$, так как $AK \perp AD$, $CN \perp AD$), в нем все углы прямые, значит, $AKCN$ – прямоугольник и диагонали $AKCN$ равны, т. е. $KN = AC = 9$ см.

Ответ: 9 см.

4) Рис. 5.169.

а) $\angle FBC$ и $\angle ABC$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, тогда $\angle N_2BN_1 = 90°$.

б) Таким же образом $\angle N_2CN_1 = 90°$.

в) ΔBN_2C – равнобедренный, так как $\angle N_2BC = \angle N_2CB$, тогда $BN_2 = CN_2$.

г) Прямоугольные ΔBN_2N_1 и ΔCN_2N_1 равны по катету и гипотенузе, тогда $\angle BN_1N_2 = \angle CN_1N_2 = 30°$.

д) В ΔBN_2N_1 $\angle N_2BN_1 = 90°$, $\angle BN_1N_2 = 30°$, $N_1N_2 = 12$ см, значит, $BN_2 = 6$ см.

Ответ: 6 см.

III. Решение задач

I уровень сложности: решить задачи № 1, 2 (для менее подготовленных учеников).

(Один ученик работает у доски (полный разбор задачи), остальные – в тетрадях.)

II уровень сложности: решить задачи № 3, 4 (самостоятельно с последующей проверкой).

(Учитель проверяет решение задач во время выполнения работы над ошибками.)

Задача № 1

Диагонали ромба $KMNP$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника KOM, если угол MNP равен 80°.

Ответ: 90°, 40°, 50°.

Задача № 2

В параллелограмме $KMNP$ проведена биссектриса угла MKP, которая пересекает сторону MN в точке E. а) Докажите, что треугольник KME равнобедренный. б) Найдите сторону KP, если $ME = 10$ см, а периметр параллелограмма равен 52 см.

Ответ: 16 см.

Задача № 3

Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали BD и пересекающая прямую AB в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая прямую BC в точке N. Найдите периметр четырехугольника $ACMN$, если диагональ BD равна 8 см.

Ответ: 32 см.

Задача № 4

Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Луч DM пересекает прямую AB в точке N. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AN = 10$ см.

Ответ: 30 см.

IV. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.170.

а) Докажите, что ΔABO равнобедренный и OE в нем медиана, высота и биссектриса.

б) Найдите $\angle EOA = 40°$, $\angle BOA = 80°$, $\angle AOD = 100°$.

в) $\angle EOD = \angle EOA + \angle AOD = 140°$.

Ответ: 140°.

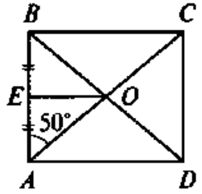


Рис. 5.170

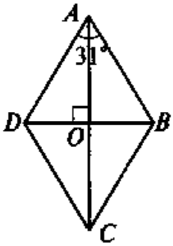


Рис. 5.171

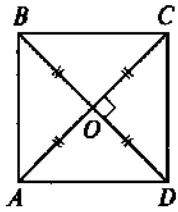


Рис. 5.172

2. Рис. 5.171.

а) $\angle A = \angle C = 31°$; CO – биссектриса $\angle C$, $\angle OCB = 15°30'$;

б) ΔCOB – прямоугольный, $\angle BOC = 90°$, $\angle OCB = 15°30'$, $\angle OBC = 74°30'$.

Ответ: 90°, 15°30′, 74°30′.

3. Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны (рис. 5.172), поэтому данный по условию задачи отрезок – это $BO = DO = AO = CO$. Поэтому:

а) постройте прямые a и b так, что $a \perp b$, $a \cap b = O$;

б) от точки O на прямых a и b отложите отрезки AO, BO, CO, DO, равные данному отрезку;

в) соедините точки A, B, C, D отрезками и получите искомый квадрат $ABCD$.

Вариант 2

1. Рис. 5.173.

а) Докажите, что ΔPMO равнобедренный и OA в нем высота и биссектриса.

б) Найдите $\angle POM = 30°$, $\angle OPM = 75°$.

в) Докажите, что $\angle OPM = \angle OHK$.

Ответ: $\angle OHK = 75°$.

2. Рис. 5.174.

а) $\angle PKE = 90° - 16°30' = 73°30'$.

б) $\angle PKH = 73°30' \cdot 2 = 147°$.

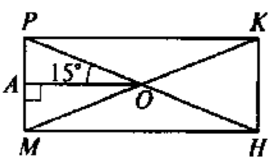


Рис. 5.173

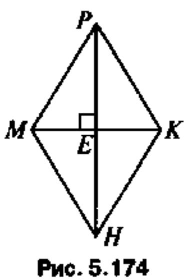


Рис. 5.174

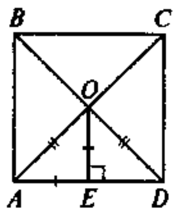


Рис. 5.175

в) $\angle PMH = 147°$.

Ответ: 147°.

3. Диагонали квадрата равны (рис. 5.175), точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов. Можно доказать, что $OE = \frac{AD}{2}$. Поэтому:

а) постройте прямые a и b так, что $a \perp b$, $a \cap b = A$;

б) от точки A на прямых a и b отложите отрезки AB и AD, равные двум данным по условию задачи отрезкам;

в) через точки A и B постройте прямые, параллельные a и b, точку пересечения обозначьте C;

г) $ABCD$ – искомый квадрат.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.176.

а) Докажите, что ΔABO равносторонний и высота BH является медианой, тогда $OH = 5$ см.

б) Докажите, что $\Delta OBH = \Delta ODE$ и $OH = OE = 5$ см.

Ответ: $OE = 5$ см.

2. Рис. 5.177.

а) $\Delta AMO = \Delta CKO$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $OM = OK$.

б) $\angle MOB + \angle COE = \angle MOB + \angle MOA = 90°$ (докажите, что $\angle COE = \angle MOA$).

3. PQ – сторона квадрата (рис. 5.178). Постройте прямую a, удаленную от стороны угла на расстояние, равное PQ. (Далее см. рисунок.)

Вариант 2

1. Рис. 5.179.

а) Докажите, что $\Delta PAO = \Delta HBO$ и $OA = OB$.

б) Докажите, что $\Delta MPA = \Delta KHB$ и $MA = BK$.

в) Докажите, что ΔPOM – равносторонний.

Ответ: $\angle POM = 60°$.

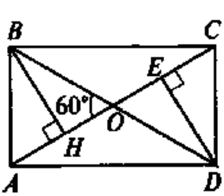


Рис. 5.176

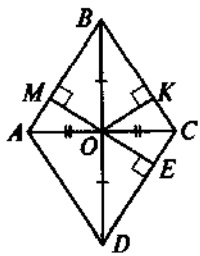


Рис. 5.177

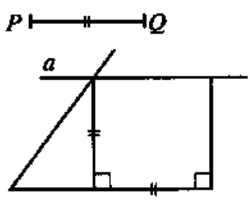


Рис. 5.178

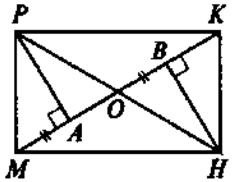


Рис. 5.179

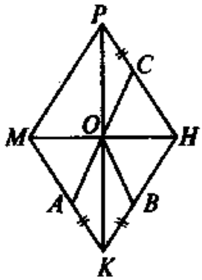


Рис. 5.180

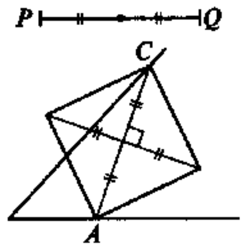


Рис. 5.181

2. Рис. 5.180.

а) $\Delta AOK = \Delta BOK$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $OA = OB$.

б) $\angle POC + \angle MOA = \angle POC + \angle COH = 90°$ (докажите, что $\angle MOA = \angle COH$).

3. PQ – диагональ квадрата (рис. 5.181). Отметьте точку A на одной стороне угла и точку C на другой так, что $AC = PQ$. (Далее см. рисунок.)

III уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.182.

а) $4 \cdot KE = AD$, тогда $2 \cdot KE = KD$, $\angle EDK = 30°$.

б) $AB = BD : 2 = AC : 2$.

в) $AM = AB : 2 = AC : 4$.

г) $AP = AM : 2 = AC : 8$. $AP : PC = 1 : 7$.

Ответ: $AP : PC = 1 : 7$.

2. Рис. 5.183.

а) Проведите $AE \perp AD$, тогда $KB = AE$, $AC = 2 \cdot AE$, $\angle ACE = 30°$.

б) $\angle COB = 60°$, $\angle AOB = 120°$.

Ответ: $\angle AOB = 120°$.

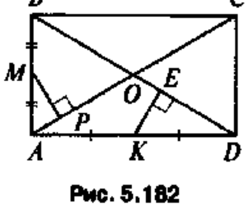


Рис. 5.182

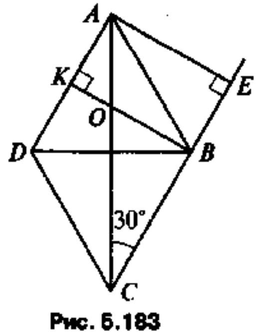


Рис. 5.183

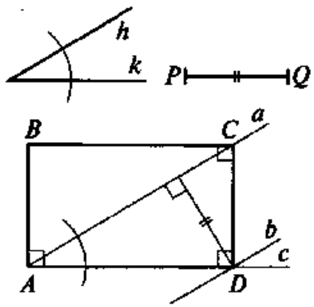


Рис. 5.184

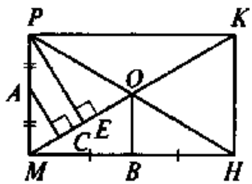


Рис. 5.185

3. $\angle(hk)$ – угол между стороной и диагональю, PQ – перпендикуляр, проведенный из вершины прямоугольника к прямой, содержащей диагональ (рис. 5.184).

а) $\angle A = \angle(hk)$.

б) $b \parallel a$, расстояние между a и b равно PQ.

в) $b \cap c = D$.

г) $DC \perp AD$, $DC \cap a = C$.

д) $CB \perp DC$, $AB \perp AD$, $AB \cap CB = B$.

е) $ABCD$ – искомый прямоугольник.

Вариант 2

1. Рис. 5.185.

а) $MC = MK : 8 = MO : 4$.

б) Проведите $PE \parallel AC$. По теореме Фалеса $MC = CE$, $ME = MO : 2$.

в) $\Delta MPE = \Delta OPE$, ΔPMO – равносторонний, $\angle PMO = 60°$, $\angle PHM = 30°$.

г) $BO : HO = 1 : 2$, тогда $BO : PH = 1 : 4$.

2. Рис. 5.186.

а) Проведите $MS \perp KM$, $PE = MS$.

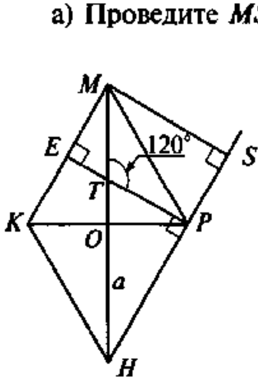
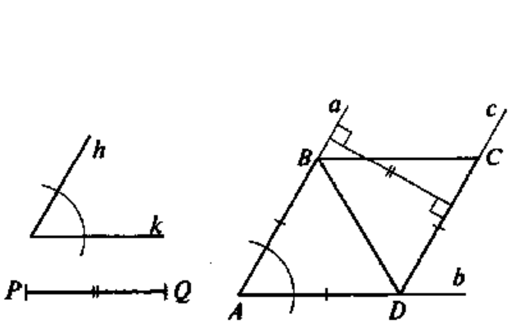


Рис. 5.186



а б

Рис. 5.187

б) В ΔPTH $\angle THP = 30°$.

в) В ΔMSH $\angle S = 90°$, $\angle MHS = 30°$, $MH = 2 \cdot a$, тогда $MS = a$.

Ответ: $PE = a$.

3. Рис. 5.187.

$\angle(hk)$ – острый угол ромба; PQ – отрезок, равный расстоянию между противоположными сторонами ромба.

а) $\angle(Ab) = \angle A = \angle(hk)$.

б) $c \parallel a$, расстояние между a и c равно PQ.

в) $b \cap c = D$.

г) $AB = AD$, $DC = AD$, $B \in a$, $C \in c$.

д) $ABCD$ – искомый ромб.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Перечислите все четырехугольники, у которых:

а) противолежащие стороны параллельны и равны;

б) все стороны равны;

в) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;

г) диагонали равны;

д) диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами углов данного четырехугольника;

е) все углы равны;

ж) противолежащие углы равны, а сумма смежных углов равна 180°.

2. Как определить, является ли четырехугольник параллелограммом, ромбом, прямоугольником, квадратом, трапецией?

3. Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.

Домашнее задание

Решить задачи (записать краткое решение).

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$ $\angle A = 30°$. На стороне BC взята точка E так, что $\angle CDE = 60°$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольной трапецией.

2. На сторонах AB, BC, CD и AD ромба $ABCD$ взяты точки P, K, H, M соответственно. Каждая из прямых PM, KH, PK параллельна одной из осей симметрии ромба. Диагональ AC пересекает отрезок PM в точке E, а отрезок KH в точке T.

   а) Докажите, что диагонали четырехугольника $EKPT$ равны.

   б) Определите вид выпуклого четырехугольника $MPKH$.

3. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $DM = DC$.

а) Докажите, что CM – биссектриса угла C параллелограмма.
б) Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 8,5$ см, $AM = 3,5$ см.

4. Постройте ромб по диагонали и углу ромба, противолежащему этой диагонали.
5. AC — диагональ параллелограмма $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ACD пересекает сторону AD в точке P. Докажите, что $APCK$ — параллелограмм.

Урок 16. Контрольная работа № 1 по теме «Четырехугольники»

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Четырехугольники».

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний по теме «Четырехугольники» может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекается в точке O, $\angle ABO = 36°$. Найдите угол AOD.

2. Найдите углы прямоугольной трапеции, если один из ее углов равен 20°.

3. Стороны параллелограмма относятся как 1 : 2, а его периметр равен 30 см. Найдите стороны параллелограмма.

4. В равнобокой трапеции сумма углов при большем основании равна 96°. Найдите углы трапеции.

5*. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$ образует со стороной AB угол 30°, $AM = 4$ см. Найдите длину диагонали BD ромба, если точка M лежит на стороне AD.

Вариант 2

1. Диагонали прямоугольника $MNKP$ пересекаются в точке O, $\angle MON = 64°$. Найдите угол OMP.

2. Найдите углы равнобокой трапеции, если один из ее углов на 30° больше второго.

3. Стороны параллелограмма относятся как 3 : 1, а его периметр равен 40 см. Найдите стороны параллелограмма.

4. В прямоугольной трапеции разность углов при одной из боковых сторон равна 48°. Найдите углы трапеции.

5*. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$ образует со стороной AB угол 30°, длина диагонали AC равна 6 см. Найдите AM, если точка M лежит на продолжении стороны AD.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Периметр параллелограмма 50 см. Одна из его сторон на 5 см больше другой. Найдите длины сторон параллелограмма.

2. Найдите угол между диагоналями прямоугольника, если каждая из них делит угол прямоугольника в отношении 4 : 5.

3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна одной из его сторон.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, $\angle ADB = \angle BDC = 30°$. Найдите длину AD, если периметр трапеции 60 см.

5*. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2, $M_1M_2 = 8$ см. Найдите AD.

Вариант 2

1. Периметр параллелограмма 60 см. Одна из его сторон на 6 см меньше другой. Найдите длины сторон параллелограмма.

2. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите угол между диагональю и меньшей стороной прямоугольника.

3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна половине неперпендикулярной к ней стороны параллелограмма.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Найдите длину AB, если периметр трапеции равен 35 см, $\angle D = 60°$.

5*. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 6$ см. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2. Найдите M_1M_2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В равнобокой трапеции длина боковой стороны $2d$, длины оснований $5d$ и $7d$. Найдите углы трапеции.

2. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle A = 60°$, $AB = 10$, $AD = 16$. Найдите расстояния от вершин B и D до биссектрисы $\angle BCD$.

3. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла DCA перпендикулярна стороне AD. Найдите углы ромба.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что треугольник AMD равносторонний. Найдите угол AMB.

5*. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке M и на продолжении стороны AB за точку A в точке N. Найдите периметр параллелограмма, если $AN = 4$, $DM = 3$.

Вариант 2

1. В равнобокой трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

2. В параллелограмме $KMNP$ угол M равен $120°$, $KM = 8$, $KP = 10$. Найдите расстояния от вершин M и P до биссектрисы угла MKP.

3. Высота ромба делит его сторону пополам. Найдите углы ромба.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка N так, что треугольник BNC равносторонний. Найдите угол NAD.

5*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F и на продолжении стороны CD за точку C в точке E. Найдите периметр параллелограмма, если $BF = 2$ см, $EC = 3$ см.

Итоговый тест № 1

Вариант 1

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна:

1) 360°; 3) 540°;
2) 900°; 4) 720°.

А2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 100°. Три оставшихся угла равны:

1) 80°, 80°, 100°; 3) 70°, 70°, 120°;
2) 75°, 75°, 110°; 4) 60°, 60°, 120°.

А3. Смежные стороны прямоугольника равны 6 и 8 см. Диагонали его равны:

1) $\sqrt{28}$ и $\sqrt{28}$ см; 3) 7 и 7 см.
2) 10 и 10 см; 4) 14 и 14 см.

А4. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 70°$, $\angle ABC$ равен:
1) 20°; 3) 55°;
2) 110°; 4) 70°.

А5. В параллелограмме разность смежных сторон равна 5 см, а его периметр равен 38 см. Меньшая сторона параллелограмма равна:
1) 7 см; 3) 9 см;
2) 12 см; 4)9,5 см.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Найдите наименьший угол параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна одной из его сторон.

В2. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, $\angle ADB = \angle BDC = 30°$. Найдите длину AD, если периметр трапеции 60 см.

В3. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла DCA перпендикулярна стороне AD. Найдите больший угол ромба.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$, образует со стороной AB угол 30°, $AM = 4$ см. Найдите длину диагонали BD ромба, если точка M лежит на стороне AD.

С2. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2, $M_1M_2 = 8$ см. Найдите AD.

Вариант 2

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Сумма углов выпуклого семиугольника равна:
1) 900°; 3) 1080°;
2) 1260°; 4) 1620°.

А2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 110°. Три оставшихся угла равны:
1) 75°, 75°, 100°; 3) 70°, 70°, 120°;
2) 70°, 70°, 110°; 4) 60°, 60°, 110°.

А3. Одна из сторон прямоугольника равна 12 см, а его диагональ 15 см. Другая сторона прямоугольника равна:
1) 12 см; 3) 7 см.
2) 13,5 см; 4) 9 см.

А4. В ромбе $ABCD$ $\angle B = 50°$, $\angle BAC$ равен:
1) 130°; 3) 50°;
2) 100°; 4) 80°.

А5. В параллелограмме отношение смежных сторон равно 2, а его периметр равен 24 см. Большая сторона параллелограмма равна:

1) 4 см;	3) 12 см;
2) 8 см;	4) 6 см.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Найдите больший угол параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна половине не перпендикулярной к ней стороны параллелограмма.

В2. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Найдите длину AB, если периметр трапеции равен 35 см, $\angle D = 60°$.

В3. Высота ромба делит его сторону пополам. Найдите меньший угол ромба.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$, образует со стороной AB угол 30°, длина диагонали AC равна 6 см. Найдите AM, если точка M лежит на продолжении стороны AD.

С2. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 6$ см. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2. Найдите M_1M_2.

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Решение задач контрольной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольнике (рис. 5.188) диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому ΔABO равнобедренный ($AO = BO$) и $\angle ABO = \angle BAO = 36°$, тогда $\angle AOB = 108°$. $\angle AOD = 180° - \angle AOB = 72°$.

Ответ: $\angle AOD = 72°$.

2. $\angle D = 20°$, $\angle C = 180° - 20° = 160°$ (рис. 5.189).

Ответ: 90°, 90°, 160°, 20°.

3. Пусть коэффициент пропорциональности равен x, тогда одна сторона параллелограмма равна x см, а другая – $2x$ см. Так

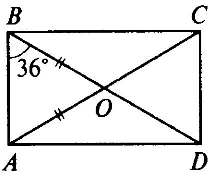


Рис. 5.188

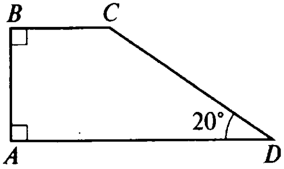


Рис. 5.189

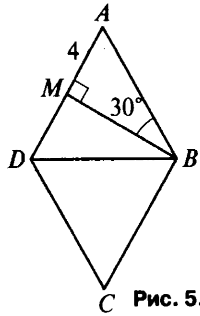


Рис. 5.190

как противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 30 см, то $x + 2x + x + 2x = 30$, $x = 5$. Стороны параллелограмма равны 5 см, 10 см.

Ответ: 5 см, 10 см, 5 см, 10 см.

4. Углы при каждом основании равнобокой трапеции равны; так как сума углов при большем основании равна 96°, то каждый из этих углов равен 96° : 2 = 48°. Сумма соседних углов, взятых при разных основаниях, равна 180°, поэтому каждый угол при меньшем основании равен: 180° – 48° = 132°.

Ответ: 48°, 48°, 132°, 132°.

5. ΔABM – прямоугольный (рис. 5.190), в нем $\angle ABM = 30°$, $AM = 4$ см, тогда $AB = 8$ см, $\angle BAM = 60°$. ΔADB равносторонний, так как $\angle DAB = 60°$, $AD = AB$, тогда $\angle ADB = \angle ABD = 60°$, значит, $DB = AD = AB = 8$ см.

Ответ: $DB = 8$ см.

Вариант 2

1. В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам (рис. 5.191), поэтому $MO = NO$, ΔMNO – равнобедренный, $\angle NMO = \angle MNO = (180° - 64°) : 2 = 58°$. Тогда $\angle OMP = 90° - \angle NMO = 32°$.

Ответ: $\angle OMP = 32°$.

2. В равнобокой трапеции углы при каждом основании равны (рис. 5.192). $\angle A + \angle B = 180°$, тогда $x + x + 30 = 180$, $x = 75$. $\angle A = \angle D = 75°$, $\angle B = \angle C = 105°$.

Ответ: 75°, 105°, 105°, 75°.

3. Пусть коэффициент пропорциональности равен x, тогда одна сторона параллелограмма равна x см, а другая – $3x$ см. Так как противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 40 см, то $x + 3x + x + 3x = 40$, $x = 5$. Стороны параллелограмма равны 5 см, 15 см.

Ответ: 5 см, 15 см, 5 см, 15 см.

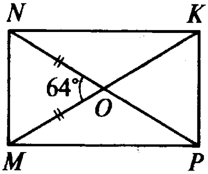


Рис. 5.191

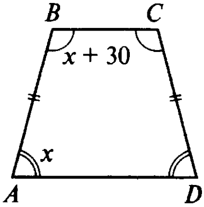


Рис. 5.192

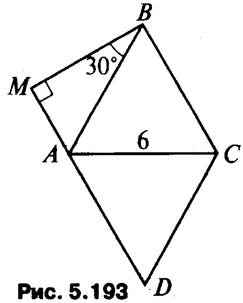


Рис. 5.193

4. Разность углов при одной из боковых сторон равна 48°, а их сумма – 180°, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 = \angle 2 + 48°$, откуда $(\angle 2 + 48°) + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 66°$, $\angle 1 = 114°$. Так как трапеция прямоугольная, то другая боковая сторона перпендикулярна основаниям и образует с ними углы по 90°.

Ответ: 66°, 114°, 90°, 90°.

5. Так как $BM \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BM \perp BC$, и $\angle ABC = 90° - 30° = 60°$ (рис. 5.193). В ΔABC $AB = BC$, $\angle ABC = 60°$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 60°) : 2 = 60°$, значит, треугольник ABC – равносторонний и $AB = AC = 6$ см. В ΔABM $\angle M = 90°$, $\angle ABM = 30°$, $AB = 6$ см, следовательно, $AM = 3$ см.

Ответ: $AM = 3$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Пусть x см – одна из сторон параллелограмма, тогда другая сторона равна $(x + 5)$ см. Так как противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 50 см, то $x + (x + 5) + x + (x + 5) = 50$, откуда $x = 10$, т. е. стороны параллелограмма равны 10 см, 15 см, 10 см, 15 см.

Ответ: 10 см, 15 см, 10 см, 15 см.

2. Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда диагональ прямоугольника делит его углы так, что один из них равен $4k°$, а другой $5k°$ (рис. 5.194). В прямоугольнике все углы прямые, тогда $4k + 5k = 90°$, откуда $k = 10$, т. е. $\angle BAO = 50°$, $\angle DAO = 40°$. ΔABO – равнобедренный, так как $AO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} = BO$, и $\angle ABO = \angle BAO = 50°$, а $\angle AOB = 180° - (50° + 50°) = 80°$.

Ответ: 80°.

3. Диагональ BD является высотой и равна сторонам AD и BC (рис. 5.195). Тогда ΔABD – прямоугольный и равнобедренный, $\angle BAD = \angle ABD = 90° : 2 = 45°$.

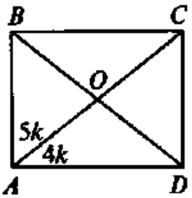


Рис. 5.194

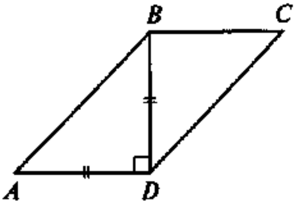


Рис. 5.195

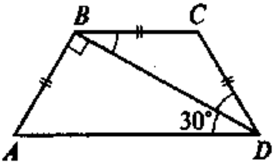


Рис. 5.196

Так как $BD \perp BC$, то $\angle ABC = 45° + 90° = 135°$. В параллелограмме противолежащие углы равны, тогда $\angle C = \angle A = 45°$, $\angle ADC = \angle ABC = 135°$.

Ответ: 45°, 135°, 45°, 135°.

4. Рис. 5.196.

а) $\angle BDA = \angle CBD = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD. $\angle CBD = \angle CDB = 30°$, поэтому ΔBCD – равнобедренный с основанием BD, т. е. $BC = CD$.

б) В ΔABD $\angle ABD = 90°$, $\angle BDA = 30°$, тогда $\angle BAD = 60°$, а в трапеции $ABCD$ $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, т. е. она равнобедренная и $AB = CD$.

в) В ΔABD $AD = 2 \cdot AB$, так как $\angle ADB = 30°$, $\angle ABD = 90°$.

г) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 60$ см, но так как $AB = BC = CD$, а $AD = 2 \cdot AB$, то $AB + AB + AB + 2 \cdot AB = 60$ см, откуда $AB = 12$ см, $AD = 24$ см.

Ответ: $AD = 24$ см.

5. Рис. 5.197.

а) Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, поэтому $\angle BM_1C = 90°$.

б) $\angle KBC$ и $\angle PCB$ – односторонние при параллельных прямых AB и CD и секущей BC, поэтому биссектрисы углов KBC и PCB перпендикулярны, т. е. $\angle BM_2C = 90°$.

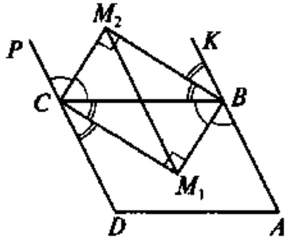


Рис. 5.197

в) $\angle ABC$ и $\angle KBC$, $\angle DCB$ и $\angle PCB$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle M_2BM_1 = 90°$, $\angle M_2CM_1 = 90°$.

г) В четырехугольнике BM_2CM_1 все углы прямые, поэтому BM_2CM_1 – прямоугольник и его диагонали равны, т. е. $BC = M_1M_2 = 8$ см, $AD = BC = 8$ см как противолежащие стороны параллелограмма.

Ответ: $AD = 8$ см.

Вариант 2

1. Пусть x см – одна из сторон параллелограмма, тогда другая сторона равна $(x - 6)$ см. Так как противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 60 см, тогда $x + (x - 6) + x + (x - 6) = 60$, откуда $x = 18$, т. е. стороны параллелограмма равны 18 см, 12 см, 18 см, 12 см.

Ответ: 18 см, 12 см, 18 см, 12 см.

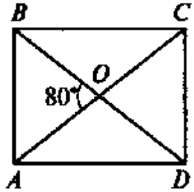


Рис. 5.198

2. ΔAOB – равнобедренный (рис. 5.198), так как $AO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} = BO$, тогда углы при основании AB равны, т. е. $\angle OBA = \angle OAB = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$. Таким образом, угол между диагональю и меньшей стороной прямоугольника равен 50°.

Ответ: 50°.

3. Диагональ $BD \perp AD$ и $BD = \frac{AD}{2}$, тогда в прямоугольном ΔABD $\angle A = 30°$, $\angle ABD = 90° - 30° = 60°$ (рис. 5.199). Так как $BD \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BD \perp BC$, т. е. $\angle DBC = 90°$, тогда $\angle ABC = 60° + 90° = 150°$.

В параллелограмме противолежащие углы равны, тогда $\angle A = \angle C = 30°$, $\angle ADC = \angle ABC = 150°$.

Ответ: 30°, 30°, 150°, 150°.

4. Рис. 5.200.

а) В ΔACD $\angle ACD = 90°$, $\angle D = 60°$, тогда $\angle CAD = 30°$ и $CD = \frac{AD}{2}$.

б) Так как AC – биссектриса $\angle BAD$, а $\angle CAD = 30°$, то $\angle BAD = 60°$, тогда трапеция $ABCD$ – равнобедренная, т. е. $AB = CD$.

в) $\angle CAD = \angle BCA = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, тогда ΔABC – равнобедренный, т. е. $AB = BC$.

г) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 35$. Так как $AB = BC = CD = \frac{AD}{2}$, то $AB + AB + AB + 2 \cdot AB = 35$, откуда $AB = 7$ см.

Ответ: $AB = 7$ см.

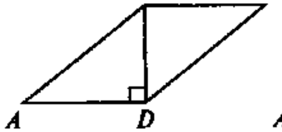


Рис. 5.199

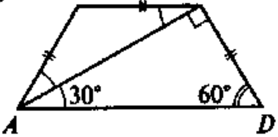


Рис. 5.200

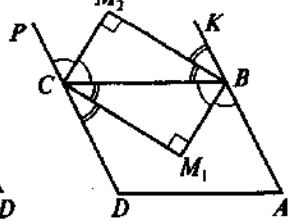


Рис. 5.201

5. Рис. 5.201.

а) Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, поэтому $\angle BM_1C = 90°$.

б) $\angle KBC$ и $\angle PCB$ – односторонние при параллельных прямых AB и CD и секущей BC, поэтому биссектрисы углов KBC и PCB перпендикулярны, т. е. $\angle BM_2C = 90°$.

в) $\angle ABC$ и $\angle KBC$, $\angle DCB$ и $\angle PCB$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle M_2BM_1 = 90°$, $\angle M_2CM_1 = 90°$.

г) В четырехугольнике BM_2CM_1 все углы прямые, значит, BM_2CM_1 – прямоугольник и его диагонали равны, т. е. $BC = M_1M_2$.

д) В параллелограмме $ABCD$ $BC = AD$, а так как $AD = 6$ см, $BC = M_1M_2$, то $M_1M_2 = 6$ см.

Ответ: $M_1M_2 = 6$ см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 5.202.

а) Проведем $BK \perp AD$ и $CH \perp AD$, тогда $KBCH$ – прямоугольник и $KH = BC = 5d$.

б) Прямоугольные ΔABK и ΔDCH равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, так как $ABCD$ – равнобокая трапеция), тогда $AK = DH = (7d - 5d) : 2 = d$.

в) В прямоугольном ΔABK $AK = d$, $AB = 2d$, тогда $\angle ABK = 30°$, значит, $\angle A = 60°$.

г) Так как $BK \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BK \perp BC$, т. е. $\angle KBC = 90°$, тогда $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = 120°$.

д) В равнобокой трапеции углы при каждом основании равны, тогда $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle ABC = \angle DCB = 120°$.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

2. Рис. 5.203.

а) В параллелограмме противолежащие углы равны и противолежащие стороны равны, следовательно, $\angle BCD = \angle A = 60°$, $BC = AD = 16$, $CD = AB = 10$.

б) CK – биссектриса $\angle BCD$, поэтому $\angle BCK = \angle DCK = 30°$.

в) В ΔBCF $\angle BFC = 90°$, $\angle BCF = 30°$, $BC = 16$, тогда $BF = 8$.

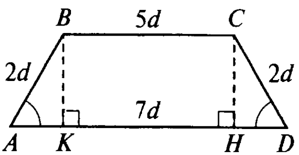


Рис. 5.202

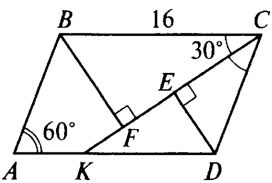


Рис. 5.203

г) В ΔCDE $\angle CED = 90°$, $\angle DCE = 30°$, $CD = 10$, тогда $DE = 5$.

Ответ: 8; 5.

3. Так как в ΔDCA биссектриса является высотой, то ΔDCA – равнобедренный с основанием AD, т. е. $AC = CD$ (рис. 5.204). В ромбе все стороны равны, $AD = CD$, значит, $AD = CD = AC$, тогда ΔACD – равносторонний и $\angle D = 60°$. В ромбе противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°, тогда $\angle B = \angle D = 60°$ и $\angle BAD = \angle BCD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

4. Рис. 5.205.

а) ΔAMD – равносторонний, тогда $\angle MAD = 60°$.

б) $ABCD$ – квадрат, $\angle BAD = 90°$ и $\angle BAM = \angle BAD - \angle MAD = 30°$.

в) В ΔAMB $AB = AM$, так как $AM = MD = AD$, поэтому ΔABM – равнобедренный с основанием BM, в нем $\angle BAM = 30°$, тогда $\angle ABM = \angle AMB = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

Ответ: $\angle AMB = 75°$.

5. Рис. 5.206.

а) CM – биссектриса $\angle BCD$, тогда $\angle BCM = \angle DCM$. Но $\angle BCM = \angle DMC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CM, тогда в ΔCDM $\angle DCM = \angle DMC$ и ΔCDM – равнобедренный, т. е. $CD = MD = 3$.

б) В ΔANM $\angle AMN = \angle CMD$ как вертикальные, $\angle ANM = \angle CMD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей NC, тогда так как $\angle MCD = \angle CMD$, то $\angle AMN = \angle ANM$ и ΔANM – равнобедренный, т. е. $AM = AN = 4$.

в) В параллелограмме $ABCD$ $CD = 3$, $AD = AM + DM = 4 + 3 = 7$, тогда $P_{ABCD} = 3 + 7 + 3 + 7 = 20$.

Ответ: $P_{ABCD} = 20$.

Вариант 2

1. Рис. 5.207.

а) В ΔBCD $BC = CD$, тогда ΔBCD – равнобедренный и $\angle CBD = \angle CDB$.

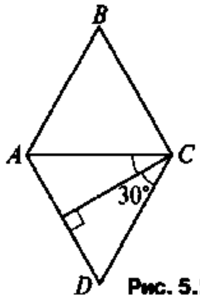


Рис. 5.204

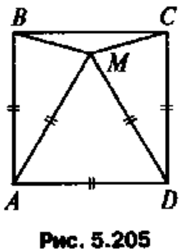


Рис. 5.205

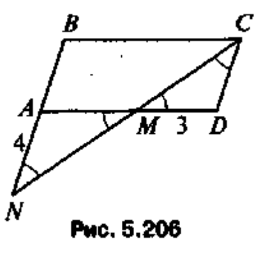


Рис. 5.206

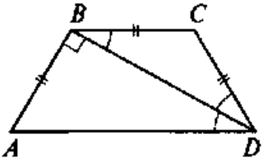


Рис. 5.207

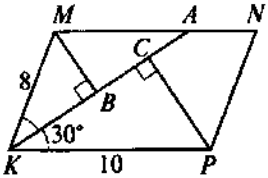


Рис. 5.208

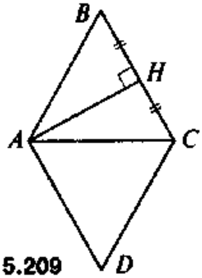


Рис. 5.209

б) $BC \parallel AD$, тогда $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие, тогда $\angle CDB = \angle BDA$, $\angle BDA = \angle CDA : 2$.

в) В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны, т. е. $\angle BAD = \angle CDA$.

г) ΔABD – прямоугольный, $\angle BAD + \angle BDA = 90°$, значит, $\angle BAD + \angle CDA : 2 = 90°$, а так как $\angle BAD = \angle CDA$, то $\angle CDA = 60°$.

д) В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны, поэтому $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, $\angle ABC = \angle BCD = 180° - \angle BAD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 120°, 60°.

2. Рис. 5.208.

а) В параллелограмме сумма соседних углов равна 180°, поэтому $\angle MKP = 180° - \angle M = 60°$.

б) Так как KA – биссектриса $\angle MKP$, то $\angle MKA = \angle PKA = 30°$.

в) В ΔKMB $\angle KBM = 90°$, $\angle MKB = 30°$, $KM = 8$, тогда $MB = 4$.

г) В ΔKCP $\angle KCP = 90°$, $\angle CKP = 30°$, $KP = 10$, тогда $CP = 5$.

Ответ: 4, 5.

3. Рис. 5.209.

а) Так как в ΔABC высота является медианой, то ΔABC – равнобедренный с основанием BC, т. е. $AB = AC$.

б) В ромбе все стороны равны, $AB = BC$, тогда $AB = BC = AC$ и ΔABC – равносторонний, $\angle B = 60°$.

в) В ромбе противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°, тогда $\angle B = \angle D = 60°$, $\angle BAD = \angle BCD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

4. Рис. 5.210.

а) ΔBNC – равносторонний, тогда $\angle NBC = 60°$.

б) $ABCD$ – квадрат, $\angle ABC = 90°$, тогда $\angle ABN = \angle ABC - \angle NBC = 30°$.

в) В ΔABN $AB = BN$, так как $BN = BC = CN$, поэтому ΔABN – равнобедренный с основанием AN, в нем $\angle ABN = 30°$, тогда $\angle BAN = \angle BNA = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

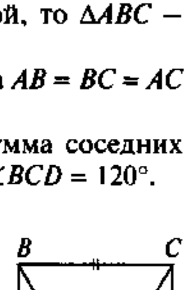


Рис. 5.210

г) $\angle BAD = 90°$, $\angle BAN = 75°$, тогда $\angle NAD = \angle BAD - \angle BAN = 15°$.

Ответ: $\angle NAD = 15°$.

5. Рис. 5.211.

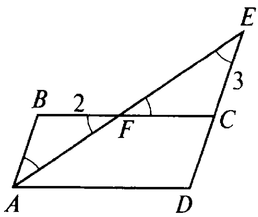


Рис. 5.211

а) AF – биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAF = \angle DAF$. Но $\angle BFA = \angle DAF$ как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AF, тогда в ΔABF $\angle BAF = \angle BFA$ и ΔABF – равнобедренный, т. е. $AB = BF = 2$.

б) В ΔCEF $\angle CFE = \angle BFA$ как вертикальные, $\angle FEC = \angle BAF$ как накрестлежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AE, тогда так как $\angle BAF = \angle BFA$, то $\angle CFE = \angle FEC$ и ΔCEF – равнобедренный, т. е. $FC = EC = 3$.

в) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = BF + FC = 2 + 3 = 5$, тогда $P_{ABCD} = 2 + 5 + 2 + 5 = 14$.

Ответ: $P_{ABCD} = 14$.

Ответы итогового теста № 1

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	C1	C2
1	3	1	2	2	1	45°	24 см	120°	6 см	8 см
2	1	2	4	1	2	150°	7 см	60°	3 см	6 см

Критерии оценивания результатов контрольной работы:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

За правильно решенную дополнительную задачу (№ 5) ставится дополнительная оценка.

Критерии оценивания результатов итогового теста:

- оценка «5» – учащийся набрал 14–19 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 9–13 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–8 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

За каждое правильно выполненное задание части А ставится 1 балл, части В – 2 балла, части С – 4 балла.

Глава VI
ПЛОЩАДЬ

Формируемые УУД: предметные: иметь понятие о площади геометрической фигуры, рассмотреть основные свойства площадей; уметь выводить формулы площади многоугольника, площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции; уметь доказывать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу; знать теорему Пифагора, теорему, обратную теореме Пифагора; знать формулу Герона; уметь вычислять площади фигур, применяя изученные свойства и формулы, применяя теорему Пифагора; формировать практические навыки вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал, уметь извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; уметь доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

Урок 17. Площадь многоугольника

Основные дидактические цели урока: дать представление об измерении площадей многоугольников; рассмотреть основные свойства площадей; вывести формулу для вычисления площади квадрата; показать учащимся примеры использования изученного теоретического материала в ходе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.
2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.
3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

III. Подготовка к восприятию нового материала

Решить задачи (фронтальная работа).

1) Через точку во внутренней области равностороннего треугольника проведены две прямые, параллельные двум сторонам треугольника. На какие фигуры разбивается этими прямыми данный треугольник?

2) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 2AB$, AM – биссектриса $\angle BAD$ (рис. 6.1). Докажите, что часть отрезка AM, лежащая во внутренней области параллелограмма $ABCD$, равна части, лежащей во внешней области.

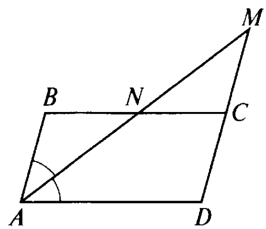


Рис. 6.1

IV. Работа по теме урока

(При изучении нового материала желательно опираться на имеющиеся у учащихся знания по данной теме.)

1. Ввести понятие площади.

– Понятие площади каждому известно из жизненного опыта. Часто мы слышим: «площадь нашей квартиры равна 63 м^2». Как вы понимаете это предложение? (*Это величина квартиры. Пол данной квартиры можно застелить 63 квадратами со стороной 1 м.*)

– Площади каких геометрических фигур мы уже умеем вычислять?

– С сегодняшнего дня мы будем учиться вычислять площади различных геометрических фигур.

2. Единицы измерения площадей.

Как и измерение длин отрезков, измерение площадей проводится с помощью единиц измерения.

– Какие единицы измерения площадей вам известны?

- квадратный метр – м^2;
- квадратный сантиметр – см^2;
- квадратный миллиметр – мм^2;
- сотка (ар) – 100 м^2;
- гектар (га) – 10 000 м^2 и др.

– Как вы понимаете утверждение «единица измерения площади см^2»? (*Площадь измеряется квадратами со стороной 1 см.*)

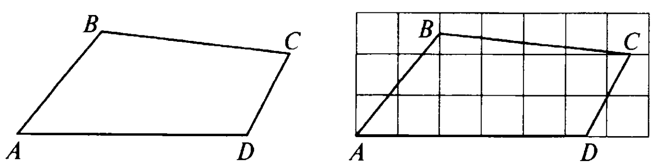
– Может ли площадь фигуры выражаться отрицательным числом? (*Нет, не может.*)

3. Измерение площадей многоугольников способом разбиения фигуры на квадраты.

– Как измерить площадь фигуры, изображенной на рис. 6.2 (а) в квадратных дециметрах?

Сторону AD разобьем на отрезки по 1 дм каждый и через концы отрезков проведем прямые, перпендикулярные стороне AD. Далее проведем прямые, параллельные AD, на расстоянии 1 дм друг от друга (рис. 6.2 (б)). Сосчитаем количество целых квадратов, вместившихся в фигуру $ABCD$. Неполные квадраты разобьем на квадратные сантиметры. Каждый квадратный сантиметр – это сотая часть квадратного дециметра. Таким образом можно вычислить площадь фигуры в квадратных дециметрах с точностью до 0,01 дм^2. Для более точного измерения площади данной фигуры неполные квадраты со стороной 1 см разобьем на квадраты со стороной 1 мм и т. д.

Такой способ вычисления площадей фигур называется способом разбиения фигуры на квадраты, но чаще всего площади



а б

Рис. 6.2

геометрических фигур вычисляются по готовым формулам, с которыми мы познакомимся на следующих уроках.

4. Рассмотреть свойства площадей.

1) Равные многоугольники имеют равные площади.

2) Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

3) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

(П. 50 учебника более подготовленным учащимся изучить самостоятельно или рассмотреть на факультативе.)

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочей тетради (самостоятельно).

Решить задачи № 27, 28.

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачи (устно).

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.3). $S_{ABCD} = 12$.
Найти: S_{ABD}, S_{BCD}.

2) *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 6.4). $CE = DE$, $S_{ABCD} = Q$.
Найти: S_{ABF}.

3) *Дано:* Площадь заштрихованного квадрата равна 1 (рис. 6.5).
Найти: S_{ABCD}.

4) *Дано:* $AB = BC = 3$, $AF = 5$, $EF = 2$ (рис. 6.6).
Найти: S_{ABCDEF}.

3. Решить задачи № 449 (в), 450 (в) (работа в парах).

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 449 (в)

$a = 3\sqrt{2}$ м, следовательно, $S = a^2 = (3\sqrt{2})^2$ м $= 18$ м^2.

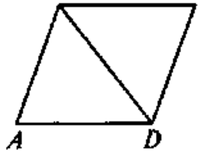


Рис. 6.3

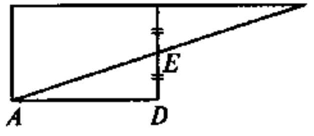


Рис. 6.4

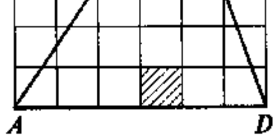


Рис. 6.5

Рис. 6.6

Задача № 450 (в)

$S = 12$ м ^{2}, следовательно, $a^2 = 12$ м, отсюда $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ м.

4. Решить задачи № 449 (а), 450 (а), 451, 447 (самостоятельно).

Ответы к задачам:

№ 449 (а): 1,44 см^2.

№ 450 (а): 4 см.

№ 451: а) 24 см^2 = 24 · 100 мм^2 = 2400 мм^2; б) 24 см^2 = = 24 · 0,01 дм^2 = 0,24 дм^2.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Что такое площадь фигуры?
2. Как вычислить площадь квадрата?
3. Сформулируйте свойства площадей.
4. Какие единицы измерения площадей вам известны?

Домашнее задание

1. П. 49, 50, вопросы 1, 2 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 446, 448, 449 (б), 450 (б).
3. Решить дополнительную задачу.

В прямоугольнике $ABCD$ серединный перпендикуляр диагонали AC пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 1 : 2$. На какие углы диагональ прямоугольника делит его угол?

Урок 18. Площадь прямоугольника

Основные дидактические цели урока: вывести формулу площади прямоугольника и показать ее применение в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 448 и дополнительной задачи. Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 448

Решение: Опустим перпендикуляр к BC из точки E ($EO \perp BC$) (рис. 6.7).

Прямоугольные треугольники ABM и EOM равны по гипотенузе и острому углу ($AM = EM$, $\angle BMA = \angle EMO$), отсюда $EO = AB$,

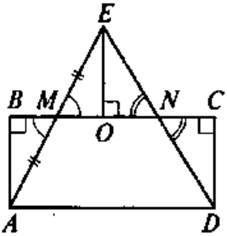


Рис. 6.7

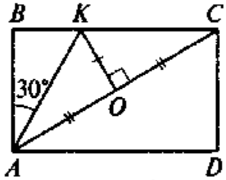


Рис. 6.8

значит, $EO = CD$, так как в прямоугольнике противолежащие стороны AB и CD равны.

Прямоугольные треугольники EON и DCN равны по катету и острому углу ($EO = CD$, $\angle ONE = \angle CND$ как вертикальные).

$S_{AED} = S_{ANMD} + S_{MOE} + S_{NOE}$, $\Delta MOE = \Delta MBA$, следовательно, $S_{MOE} = S_{MBA}$, $\Delta NOE = \Delta NCD$, следовательно, $S_{NOE} = S_{NCD}$.

Тогда $S_{AED} = S_{AMND} + S_{MBA} + S_{NCD} = S_{ABCD}$.

Дополнительная задача

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AO = OC$, $OK \perp AC$, $BK : KC = 1 : 2$.

Найти: $\angle BCA$, $\angle DCA$.

Решение:

а) $\Delta AKO = \Delta CKO$ по двум катетам ($\angle AOK = \angle COK = 90°$, $AO = OC$, KO – общий катет), тогда $AK = CK$ (рис. 6.8).

б) ΔABK – прямоугольный. Так как $BK : KC = 1 : 2$, а $AK = CK$, то $BK : AK = 1 : 2$, тогда $\angle KAB = 30°$, $\angle AKB = 60°$ и $\angle AKC = 120°$.

в) Так как $AK = CK$, то $\angle KAC = \angle KCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника AKC. $\angle AKC = 120°$, тогда $\angle KCA = \angle KAC = 30°$.

г) $\angle BCD = 90°$, $\angle BCA = 30°$, тогда $\angle DCA = 60°$.

Ответ: 30°, 60°.

2. Индивидуальные задания по карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам.)

I уровень сложности

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.9), $K \in BC$, $S_{ABCD} = 24$ см^2.

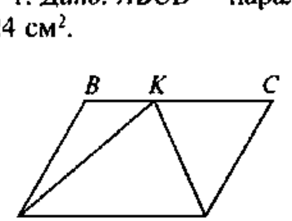


Рис. 6.9

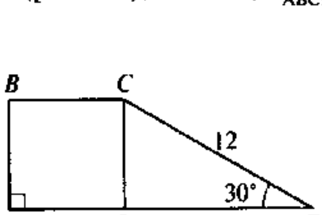


Рис. 6.10

Найти: S_{AKD}.

2. *Дано:* $ABCD$ – квадрат (рис. 6.10).

Найти: S_{ABCD}.

II уровень сложности

1. В трапеции $MNKP$ MP и NK – основания ($MP > NK$), E – середина KP, прямые NE и MP пересекаются в точке S, площадь трапеции равна 45 дм^2. Найдите площадь треугольника MNS.

2. Найдите сумму площадей квадратов, построенных на сторонах прямоугольника, со сторонами 5 см и 7 см.

III уровень сложности

1. Докажите, что площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.

2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $DE \perp AB$, $DE = AB = 10$ см. Найдите площадь этого параллелограмма.

3. Решить задачи (устно).

1) Задача № 29 (рабочая тетрадь).

Ответ: а) 8 см; б) 1,3 дм.

2) Докажите, что два прямоугольника равны, если равны их смежные стороны.

3) *Дано:* $ABCD$ – квадрат (рис. 6.11), $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $AM = CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

Найти: S_{AFKM}.

III. Работа по теме урока

1. Изучить п. 50 учебника самостоятельно.

2. Доказать теорему о площади прямоугольника.

(Наиболее подготовленный ученик готовит у доски доказательство теоремы.)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.12) и запись:

Дано: $S = a \cdot b$.

Доказательство:

а) Достроить прямоугольник до квадрата $AMKE$ со стороной $(a + b)$. $S_{AMKE} = (a + b)^2$.

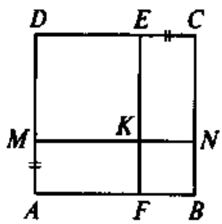


Рис. 6.11

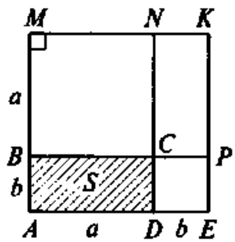


Рис. 6.12

б) $S_{AMKE} = S_{ABCD} + S_{BMNC} + S_{CNKP} + S_{DCPE}$.

в) $ABCD = CNKP$, следовательно, $S_{ABCD} = S_{CNKP} = S$. $BMNC$ – квадрат со стороной a, отсюда $S_{BMNC} = a^2$. $DCPE$ – квадрат со стороной b, следовательно, $S_{DCPE} = b^2$.

г) $S_{AMKE} = (a + b)^2 = S + a^2 + S + b^2$, или $a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2$.

$2S = 2ab$, откуда $S = ab$, что и требовалось доказать.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочей тетради (самостоятельно).

Решить задачи № 30, 31 (устно).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение, заполняя пропуски. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачи № 452 (а, в), 453 (в) (устно).

3. Решить задачи (работа в парах с последующим обсуждением решения у доски).

Задача № 458

$S_{кв.} = a^2$, $S_{прям.} = a \cdot b$.

$P_{кв.} = 4a$, $P_{прям.} = 2 \cdot (a + b)$.

Заборы имеют одинаковую длину, поэтому участки земли имеют одинаковый периметр.

$S_{прям.} = a \cdot b = 220 \cdot 160 = 35\ 200$ м^2.

$P_{прям.} = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (220 + 160) = 760$ м.

$P_{кв.} = 4a$, но $P_{кв.} = P_{прям.} = 760$ м, т. е. $4a = 760$, $a = 190$ м.

$S_{кв.} = a^2 = 190^2 = 36\ 100$ м^2.

$36\ 100$ м^2 > $35\ 200$ м^2, поэтому площадь квадрата больше площади прямоугольника. $36\ 100 - 35\ 200 = 900$ м^2.

Ответ: Площадь участка земли, имеющего форму квадрата, больше на 900 м^2.

Наводящие вопросы.

– «Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины». Переведите на математический язык это предложение.
– Как найти сторону квадрата, если его периметр равен периметру прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м?
– Как определить, площадь какого участка больше и на сколько?

Задача № 457

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Наводящие вопросы.

– Как найти площадь прямоугольника? Как найти площадь квадрата?

– Чему равна сторона квадрата, если его площадь равна 144 м²? Как проверить правильность своих вычислений?

V. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 80 см, а отношение сторон равно 2 : 3.

2. Площадь пятиугольника *ABOCD* равна 48 см² (рис. 6.13). Найдите площадь и периметр квадрата *ABCD*.

Вариант 2

1. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 98 см², а одна из сторон вдвое больше другой.

2. Периметр квадрата *PTMK* равен 48 см (рис. 6.14). Найдите площадь пятиугольника *PTMOK*.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольнике *ABCD* сторона *AD* равна 10 см. Расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь прямоугольника.

2. *ABCD* и *MDKP* – равные квадраты (рис. 6.15). $AB = 8$ см. Найдите площадь и периметр четырехугольника *ACKM*.

Вариант 2

1. Площадь квадрата равна 36 см². Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.

2. *ABCD* и *DCMK* – квадраты (рис. 6.16). $AB = 6$ см. Найдите площадь и периметр четырехугольника *OCPD*.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В трапеции *ABCD* $\angle A = 45°$, $\angle C = 100°$. Диагональ *BD* составляет с боковой стороной *CD* угол 35°. На стороне *AB* построен параллелограмм *ABPK* так, что точка *D* принадлежит отрезку *BP* и $BD : DP = 2 : 1$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

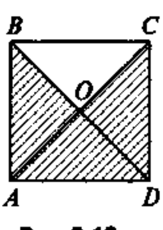


Рис. 6.13

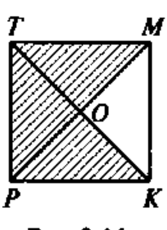


Рис. 6.14

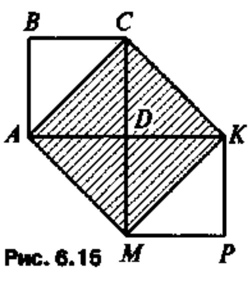


Рис. 6.15

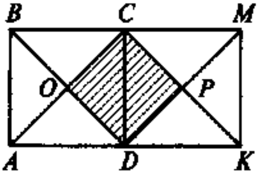


Рис. 6.16

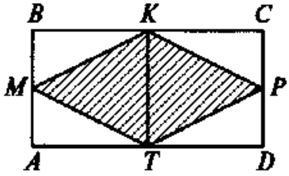


Рис. 6.17

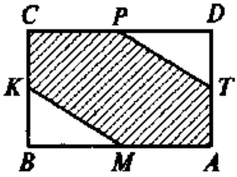


Рис. 6.18

2. *ABCD* – прямоугольник (рис. 6.17); *M*, *K*, *P*, *T* – середины его сторон, $AB = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите площадь четырехугольника *MKPT*.

Вариант 2

1. В трапеции *MPKO* $\angle M = 45°$, $\angle K = 135°$. На стороне *MP* трапеции построен параллелограмм *MPDT* так, что его сторона *PD* параллельна прямой *KO* и пересекает сторону *MO* в точке *A*, причем $PA : AD = 1 : 3$. Площадь параллелограмма равна 36 см². Найдите его периметр.

2. *ABCD* – прямоугольник (рис. 6.18); *M*, *K*, *P*, *T* – середины его сторон, $AB = 16$ см, $AD = 10$ см. Найдите площадь шестиугольника *AMKCPT*.

Указания и ответы для самопроверки:

I уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 6.19. x – коэффициент пропорциональности.
$P = 2x + 3x + 2x + 3x = 80$, $x = 8$. $AB = 16$ см, $AD = 24$ см.
$S_{ABCD} = 16 \cdot 24 = 384$ см².
Ответ: 384 см².

2. $S_{ABO} = S_{ADO} = S_{CDO} = S_{BOC}$.
$S_{ABOCD} = 48$ см², $S_{ABO} = 16$ см², $S_{ABCD} = 64$ см², тогда $AB = 8$ см, $P_{ABCD} = 32$ см.
Ответ: $S_{ABCD} = 64$ см², $P_{ABCD} = 32$ см.

Вариант 2

1. Рис. 6.20. $S = x \cdot 2x = 98$, $x = 7$.
$AB = CD = 7$ см, $AD = DC = 14$ см. $P_{ABCD} = 42$ см.
Ответ: $P_{ABCD} = 42$ см.

2. $P_{PTMK} = 48$ см, тогда $PT = TM = MK = PK = 12$ см.

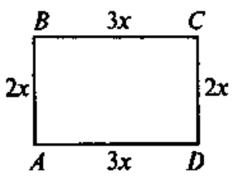


Рис. 6.19

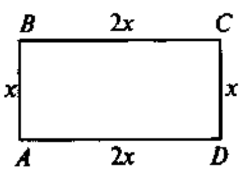


Рис. 6.20

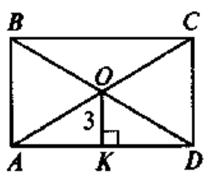


Рис. 6.21

$S_{PTMK} = 12 \cdot 12 = 144$ см^2, $S_{OMK} = S_{PTMK} : 4 = 36$ см^2, $S_{PTOMK} = 144 - 36 = 108$ см^2.

Ответ: $S_{PTOMK} = 108$ см^2.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Докажите, что $OK = \frac{AB}{2}$ (рис. 6.21).

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 6 \cdot 10 = 60$ см^2.

Ответ: $S_{ABCD} = 60$ см^2.

2. Площадь квадрата $ACKM$ в два раза больше площади квадрата $ABCD$, значит, площадь квадрата $ACKM$ равна 128 см^2, следовательно, $AC = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ см. Периметр $ACKM$ равен $8\sqrt{2} \cdot 4 = 32\sqrt{2}$ см.

Ответ: $P_{ACKM} = 32\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. $S_{ABCD} = 36$ см^2, $AB = 6$ см (рис. 6.22).

Докажите, что $OK = \frac{AD}{2} = 3$ см.

Ответ: 3 см.

2. Площадь квадрата $ABCD$ в два раза больше площади квадрата $OCPD$, значит, площадь квадрата $OCPD$ равна 18 см^2, следовательно, $OC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ см. Периметр $OCPD$ равен $3\sqrt{2} \cdot 4 = 12\sqrt{2}$ см.

Ответ: $P_{OCPD} = 12\sqrt{2}$ см, $S_{OCPD} = 18$ см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В ΔBCD $\angle CBD = 45°$ (рис. 6.23). Так как $\angle ABC = 135°$, то $\angle ABD = 90°$, тогда $ABPK$ – прямоугольник. В ΔABD $\angle BAD = \angle BDA = 45°$, тогда $AB = BD$ и $AB : BP = 2 : 3$.

$P_{ABPK} = 30$ см, тогда $2x + 3x + 2x + 3x = 30$. Откуда $x = 3$, $AB = 6$ см, $BP = 9$ см, $S_{ABPK} = 6 \cdot 9 = 54$ см^2.

Ответ: $S_{ABPK} = 54$ см^2.

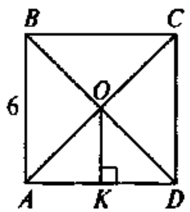


Рис. 6.22

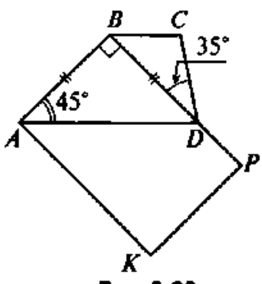


Рис. 6.23

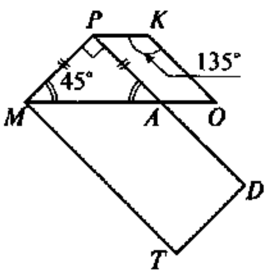


Рис. 6.24

2. Проведите прямые KT и MP и докажите, что они делят прямоугольник $ABCD$ на 8 равных треугольников.

$S_{MPKT} = S_{ABCD} : 2 = 6 \cdot 12 : 2 = 36$ см^2.

Ответ: $S_{MPKT} = 36$ см^2.

Вариант 2

1. $\angle O = 45°$, тогда $\angle PAM = 45°$ и в ΔMPA $\angle MPA = 90°$, тогда $MPDT$ – прямоугольник (рис. 6.24).

В ΔMPA $MP = AP$, тогда $MP : PD = 1 : 4$, т. е. $MP = x$, $PD = 4x$.

$S_{MPDT} = 36$ см^2 $= x \cdot 4x$, откуда $x = 3$, т. е. $MP = 3$ см, $PD = 12$ см, $P_{MPDT} = 30$ см.

Ответ: $P_{MPDT} = 30$ см.

2. Проведите прямые MP, KT, KP, MT и докажите, что они делят прямоугольник $ABCD$ на 8 равных треугольников.

$S_{AMKCPT} = \frac{3}{4} \cdot S_{ABCD} = 3 : 4 \cdot 16 \cdot 10 = 120$ см^2.

Ответ: $S_{AMKCPT} = 120$ см^2.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Как вычисляется площадь квадрата, прямоугольника?
2. Сформулируйте свойства площадей.

Домашнее задание

1. П. 51, вопрос 3 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 454, 455, 456.
3. Решить задачу № 32 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительные задачи.

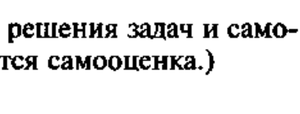


Рис. 6.25

I уровень сложности: *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, C – середина BF (рис. 6.25). $P_{ABCD} = 46$ см, BC на 5 см больше AB. *Найти:* а) S_{ABCD}; б) S_{ABF}.

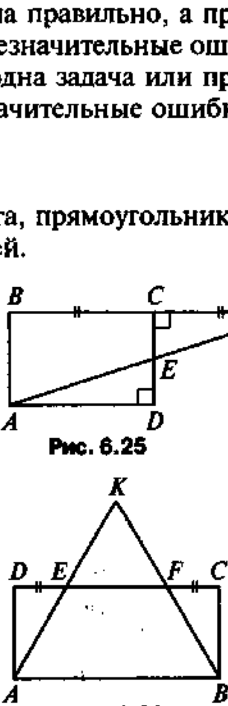


Рис. 6.26

II уровень сложности: *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $P_{ABCD} = 44$ см (рис. 6.26), $DC : AD = 7 : 4$. $DE = FC = \frac{EF}{2}$. *Найти:* S_{ABK}.

Урок 19. Площадь параллелограмма

Основные дидактические цели урока: вывести формулу для вычисления площади параллелограмма и показать применение этой формулы в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Перечислите основные свойства площадей.

2) Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 455 и дополнительных задач. Три ученика заранее готовят решение на доске.)

Решение дополнительных задач:

I уровень сложности

1) Так как $P_{ABCD} = 46$ см, BC на 5 см больше AB, то $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = AB + (AB + 5) + AB + (AB + 5) = 46$ (учтено, что $BC = AD = (AB + 5)$ см, $AB = CD$). Тогда $AB = 9$ см, $BC = 14$ см, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 14 = 126$ см^2.

2) $\Delta ADE = \Delta FCE$ по катету и острому углу ($CE = BC = AF$, $\angle CEF = \angle AED$ как вертикальные), тогда $S_{ADE} = S_{FCE}$, и $S_{ABF} = S_{ABCE} + S_{CEF} = S_{ABCE} + S_{ADE} = S_{ABCD} = 126$ см^2.

Ответ: а) $S_{ABCD} = 126$ см^2; б) $S_{ABF} = 126$ см^2.

Наводящие вопросы.

– Как найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен 46 см, а сторона BC на 5 см больше AB?
– Какая формула применяется для вычисления площади прямоугольника?
– Что можно сказать о площадях прямоугольника $ABCD$ и треугольника ABF? Почему?

II уровень сложности

Рис. 6.27.

1) Проведем KP так, чтобы $PE = PF$, тогда $DE = PE = PF = FC$, так как по условию $DE = FC = \frac{EF}{2}$.

2) $\Delta ADE = \Delta BCF$ по двум катетам ($DE = FC$ по условию, $AD = CB$ как противолежащие стороны прямоугольника), тогда $\angle DEA = \angle CFB$, значит, вертикальные им углы KEP и KFP тоже равны.

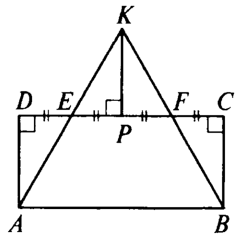


Рис. 6.27

3) Так как $\angle KEP = \angle KFP$, то ΔEKF – равнобедренный и медиана KP является высотой, следовательно, $\angle EPK = \angle FPK = 90°$.

4) $\Delta ADE = \Delta KPE$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($DE = PE$, $\angle DEA = \angle PEK$), $\angle D = \angle KPE = 90°$.

5) $\Delta BCF = \Delta KPF$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($FC = PF$, $\angle KFP = \angle BFC$, $\angle C = \angle KPF = 90°$).

6) $S_{ABK} = S_{AEFB} + S_{EPK} + S_{FPK} = S_{AEFB} + S_{ADE} + S_{BCF} = S_{ABCD}$.

7) $DC : AD = 7 : 4$, тогда $DC = 7k$, $AD = 4k$ (k – коэффициент пропорциональности). $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 44$.

Так как противолежащие стороны прямоугольника равны, то $AB = CD = 7k$, $AD = BC = 4k$, тогда $7k + 4k + 7k + 4k = 44$, $k = 2$, следовательно, $AB = 14$ см, $AD = 8$ см, $S_{ABCD} = 14 \cdot 8 = 112$ см^2, тогда $S_{ABK} = 112$ см^2.

Ответ: $S_{ABK} = 112$ см^2.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о площади прямоугольника $ABCD$ и площади треугольника AKB? Почему?

– Для нахождения площади прямоугольника необходимо найти его стороны. Как это можно сделать, используя условия задачи?

Задача № 455

Решение: $S_{прям.} = a \cdot b$. $S_{пола} = 5{,}5 \cdot 6 = 33$ м^2. $S_{дощечки} = 5 \cdot 30 = 150$ см$^2 = 0{,}015$ м^2. Чтобы найти количество требуемых дощечек, нужно $S_{пола}$ разделить на $S_{дощечки}$. $33 : 0{,}015 = 2200$ дощечек.

Ответ: 2200.

Наводящие вопросы.

– Как сосчитать, сколько дощечек паркета нужно для покрытия пола? Что для этого нужно знать?

– Как найти площадь пола? Как найти площадь одной дощечки?

– Как перевести квадратный сантиметр в квадратный метр?

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время проверки домашнего задания.)

I уровень сложности

1. Периметр квадрата равен 20 см. Прямоугольник имеет такую же площадь, что и квадрат, а одна из его сторон равна 10 см. Найдите периметр прямоугольника.

2. Найдите площадь прямоугольника с периметром 60 см и отношением сторон 1 : 2.

II уровень сложности

1. Биссектриса угла *A* прямоугольника *ABCD* разбивает сторону *BC* на отрезки, равные 4 см и 5 см. Найдите площадь прямоугольника.

2. В прямоугольнике *MNKP* сторона *MP* равна 8 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 5 см. Чему равна площадь этого прямоугольника?

III уровень сложности

1. Высота *BD* треугольника *ABC* равна 8 см и делит сторону *AC* на отрезки, равные 5 см и 6 см. Найдите площадь треугольника.

2. Диагонали ромба равны 10 см и 12 см. Чему равна его площадь?

3. Решение задач для подготовки учащихся к восприятию нового материала (работа в группах).

Задача № 1

Дано: ABCD – параллелограмм (рис. 6.28), $BM = 4$, $MN = 6$, $BM \perp AD$, $CN \perp AD$.

Доказать: $S_{ABM} = S_{DCN}$. *Найти:* S_{ABCD}.

Задача № 2

Дано: ABCD – параллелограмм (рис. 6.29).

Найти: S_{ABCD}.

(Учащиеся обсуждают решение задач № 1, 2.)

III. Работа по теме урока

Ввести понятие высоты параллелограмма.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.30) и запись:

BH – высота, проведенная к стороне *AD* параллелограмма *ABCD*.

BK – высота, проведенная к стороне *CD* параллелограмма *ABCD*.

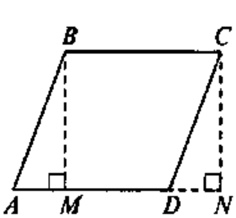


Рис. 6.28

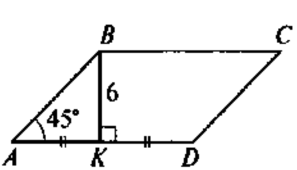


Рис. 6.29

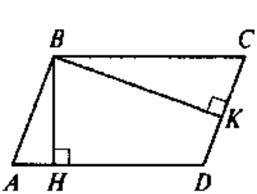


Рис. 6.30

Задача

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = a$, BH – высота, $BH = h$.
Найти: S_{ABCD}.

(Учитель делит класс на группы по 3–4 человека. На обсуждение дается 3–5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.31) и запись:

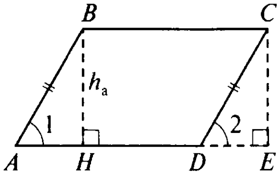


Рис. 6.31

Теорема: $S_{\text{пар-ма}} = a \cdot h_a$, где a – сторона параллелограмма, h_a – высота, проведенная к ней.

Доказательство:

1) Проведем $BH \perp AD$, $CE \perp AD$.

2) $\Delta ABH = \Delta DCE$ по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма; $\angle 1 = \angle 2$, так как $\angle 2 = 180° - \angle ADC$ и $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ как сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых AB и CD и секущей AD; $\angle AHB = \angle CED = 90°$), следовательно, $S_{ABH} = S_{DCE}$, $DE = AH$.

3) $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{HBCD} = S_{DCE} + S_{HBCD} = S_{HBCE}$. $HBCE$ – прямоугольник, $S_{HBCE} = HE \cdot BH$, $HE = HD + DE$, но так как $DE = AH$, то $HE = AH + HD = AD$, т. е. $S_{HBCE} = AD \cdot BH = a \cdot h_a$, отсюда $S_{ABCD} = a \cdot h_a$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи № 33, 34 (рабочая тетрадь).

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить задачу № 34.)

2. Решить задачу № 459 (а, б) (устно).

3. Решить № 463, 464 (в).

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях. После завершения работы учащиеся проверяют правильность решения задач на доске.)

Задача № 463

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 8{,}1$ см, $AC = 14$ см, $\angle DAC = 30°$ (рис. 6.32).

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

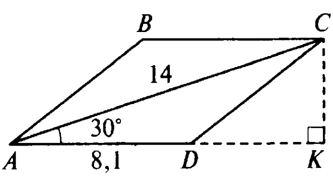


Рис. 6.32

а) Проведем высоту CK к стороне AD параллелограмма. ΔACK – прямоугольный, в нем $\angle CAK = 30°$, $AC = 14$ см, тогда $CK = 7$ см.

б) $S_{ABCD} = CK \cdot AD = 7 \cdot 8{,}1 = 56{,}7$.

Ответ: $S_{ABCD} = 56{,}7$ см^2.

Наводящие вопросы.

– Какая формула используется для вычисления площади параллелограмма?

– Сторона AD равна 8,1 см. Высоту к ней можно провести из вершин B и C. Которую из них удобнее будет вычислить?

Задача № 464 (в)

Дано: $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

Найти: h_1 и h_2.

Решение: $S_{\text{пар-ма}} = a \cdot h_a$ или $S_{\text{пар-ма}} = b \cdot h_b$, поэтому $h_1 = h_a = S_{\text{пар-ма}} : a = 54 : 4{,}5 = 12$ см, $h_2 = h_b = S_{\text{пар-ма}} : b = 54 : 6 = 9$ см.

Ответ: $h_1 = 12$ см, $h_2 = 9$ см.

Наводящие вопросы.

– Назовите две формулы, позволяющие вычислить площадь данного параллелограмма?

– Зависит ли величина площади от способа вычисления?

– Как найти h_1 и h_2?

4. Решить задачи № 461, 464 (б), 465 (самостоятельно).

Ответы и краткое решение задач:

Задача № 461

$h = 6$ см $\Rightarrow S_{ABCD} = 14 \cdot 6 = 84$ см^2.

Задача № 464 (б)

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{a \cdot h_2}{b} = \frac{10 \cdot 6}{15} = 4 \text{ см}.$$

Задача № 465

$BK = 2$ см $\Rightarrow AB = 4$ см (рис. 6.33).

$S_{ABCD} = AB \cdot BM = 4 \cdot 3 = 12$ см^2.

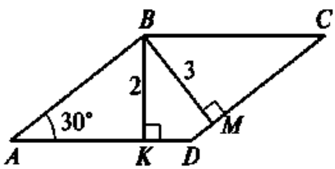


Рис. 6.33

5. Решить дополнительные задачи.

1) Стороны параллелограмма равны 10 см и 6 см, а угол между этими сторонами равен 150°. Найдите площадь этого параллелограмма.

Ответ: 30 см^2.

2) Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 6 см.

Ответ: 24 см^2.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Дайте определение высоты параллелограмма.
2. Чему равна площадь параллелограмма?

Домашнее задание

1. П. 52, вопрос 4 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 459 (в, г), 460, 462, 464 (а).
3. Решить дополнительную задачу.

Высоты, проведенные из вершины тупого угла параллелограмма, составляют угол в 45°. Одна из высот делит сторону, на которую она опущена, на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины острого угла. Найдите площадь параллелограмма.

Урок 20. Площадь треугольника

Основные дидактические цели урока: вывести формулы для вычисления площади треугольника и показать их применение в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос (фронтальная работа).

1) Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма. (Один ученик готовит доказательство теоремы у доски.)

2) Сформулируйте основные свойства площадей фигур.

3) Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель индивидуально проверяет решение дополнительной задачи.)

Решение: В ΔABE (рис. 6.34) $\angle ABE = 90° - \angle A$, в ΔCBK $\angle CBK = 90° - \angle C$. Тогда $\angle A + \angle ABC = \angle A + \angle ABE + \angle EBK + \angle CBK = \angle A + (90° - \angle A) + 45° + (90° - \angle C) = 225° - \angle C = 180°$, тогда $\angle C = 45°$. ΔABE – прямоугольный, равнобедренный ($\angle A = \angle C = 45° = \angle ABE = 90° - \angle A = 45°$), тогда $AE = BE = 2$ см.

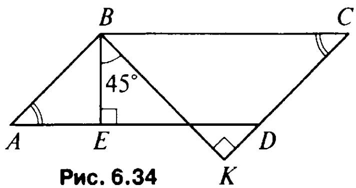


Рис. 6.34

$S_{\text{ABCD}} = AD \cdot BE = 2 \cdot 10 = 20$ см^2.

Ответ: 20 см^2.

3. Работа в рабочей тетради (самостоятельно).

Решить задачу № 35.

Ответ: $S_{\text{ABCD}} = 20{,}48$ см^2.

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

4. Решение задач для закрепления формулы вычисления площади параллелограмма (самостоятельно с последующей взаимопроверкой).

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.35).
Найти: S_{ABCD}.
2) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.36).
Найти: S_{ABCD}.
3) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.37).
Найти: S_{ABCD}.
4) *Дано:* $ABCD$ – ромб, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см (рис. 6.38).
Найти: S_{ABCD}.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решена одна задача.

Ответы к задачам:
1) $S_{ABCD} = 30$ см^2.
2) $S_{ABCD} = 20$ см^2.
3) $S_{ABCD} = 56$ см^2.
4) $S_{ABCD} = 40$ см^2.

5. Решение задач для подготовки учащихся к восприятию нового материала (устно).

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.39).
Найти: S_{ABCD}, S_{ABD}, S_{BCD}, S_{ABC}, S_{ADC}.
2) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.40).
Найти: S_{ABD}.

(В процессе решения этих задач учитель и учащиеся повторяют основные свойства площадей, формулу для вычисления площади параллелограмма, акцентируя внимание на том, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.)

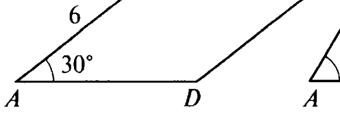


Рис. 6.35

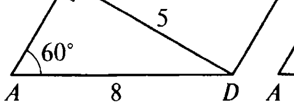


Рис. 6.36

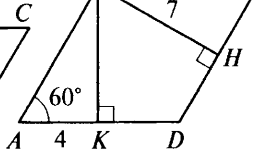


Рис. 6.37

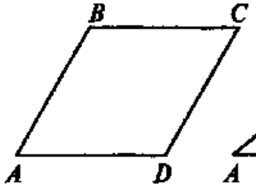


Рис. 6.38

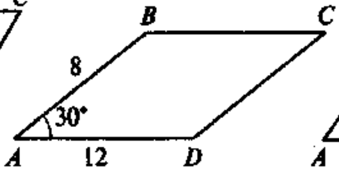


Рис. 6.39

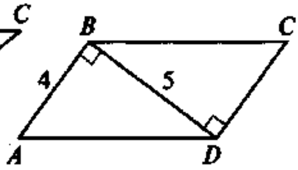


Рис. 6.40

III. Работа по теме урока

Решить задачу.

Дано: В треугольнике ABC $AB = c$, CH – высота, $CH = h$.

Найти: S_{ABC}.

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.41) и запись:

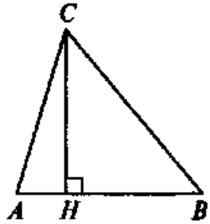


Рис. 6.41

$S_\Delta = CH \cdot AB : 2$.

$S_\Delta = h_a \cdot a : 2$, где a – сторона треугольника, h_a – высота, проведенная к стороне a.

(Следствия 1 и 2 можно предложить в виде задач на доказательство.)

а) В ΔABC $\angle C = 90°$. Докажите, что $S_{ABC} = AC \cdot BC : 2$.

б) В треугольниках ABC и MNK высоты, проведенные к сторонам AB и MN соответственно, равны. Докажите, что $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta MNK} = AB : MN$.

На доске и в тетрадях рисунки и запись:

Следствия теоремы о площади треугольника

1. $S_{\Delta ABC} = CA \cdot CB : 2$ (рис. 6.42).

2. Если BH и NE – высоты ΔABC и ΔMNK соответственно и $BH = NE$, то $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta MNK} = AC : MK$ (рис. 6.43).

(Работа в группах оценивается учителем.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – ставится учащимся, принимавшим активное участие в решении задач;

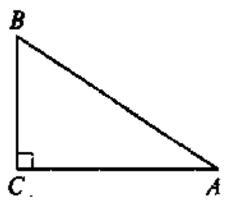


Рис. 6.42

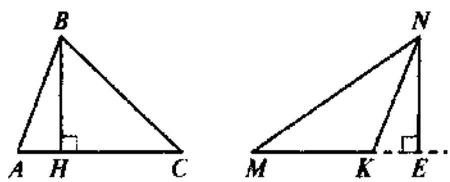


Рис. 6.43

- оценка «4» – ставится учащимся, которые при решении задач допускали ошибки;
- оценка «3» – ставится учащимся, принимавшим пассивное участие в решении задач.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 36.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его внимательно слушают.)

– Как вы считаете, правильно ли решена задача?

2. Решить задачи № 468 (а, б), 471, 474 (устно).

(Рисунок к задаче № 474 подготовить на доске заранее.)

Ответы к задачам:

№ 468 (а): 38,5 см^2.

№ 468 (б): $5\sqrt{3}$ см^2.

№ 471: а) 22 см^2; б) 1,8 дм^2.

№ 474: площади равны.

3. Решить задачу № 470.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 470

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 2{,}4 = 9 \text{ см}^2.$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b, \text{ следовательно, } h_b = \frac{2S_\Delta}{b} = \frac{2 \cdot 9}{3{,}2} = 5{,}625 \text{ см}.$$

Ответ: 5,625 см.

Наводящие вопросы.

– К какой из двух сторон проведена высота, равная 2,4 см?

– Напишите формулу для вычисления высоты, проведенной к меньшей стороне.

– Известно ли значение площади данного треугольника? Как ее можно вычислить?

4. Решить задачи № 472, 475 (самостоятельно).

Задача № 472

Краткое решение: $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot b$, $a = 7$, $b = 12x$.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x = 168 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow a = 14 \text{ см}, b = 24 \text{ см}.$$

Задача № 475

Указание. Разделить отрезок BC на три равные части BK, KE, EC, используя теорему Фалеса (рис. 6.44).

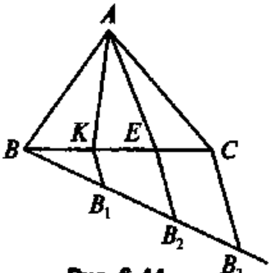


Рис. 6.44

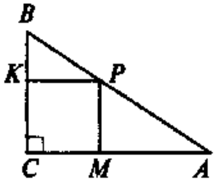


Рис. 6.45

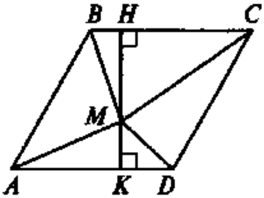


Рис. 6.46

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. На сторонах AC, AB и BC соответственно взяты точки M, P, K так, что четырехугольник $CMPK$ – квадрат, $BC = 6$ см, $AC = 14$ см. Найдите сторону MC.

Решение: Пусть $CM = x$ см, тогда $AM = (14 - x)$ см, $BK = 6 - x$ см (рис. 6.45).

$S_{ABC} = AC \cdot CB : 2 = 14 \cdot 6 : 2 = 42$ см^2.

$S_{BKP} = BK \cdot KP : 2 = (6 - x) \cdot x : 2$ см^2.

$S_{CKPM} = x^2$ см^2, $S_{MPA} = MA \cdot MP : 2 = (14 - x) \cdot x : 2$ см^2.

$S_{ABC} = S_{BKP} + S_{CKPM} + S_{MPA} = (6 - x) \cdot x : 2 + x^2 + (14 - x) \cdot x : 2 =$ $= 3x - x^2 : 2 + x^2 + 7x - x^2 : 2 = 10x = 42$.

Откуда $x = 4{,}2$, т. е. $MC = 4{,}2$ см.

Ответ: $MC = 4{,}2$ см.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BMC равна половине площади параллелограмма.

Решение: $S_{BMC} = BC \cdot MH : 2$, $S_{AMD} = AD \cdot MK : 2$. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AD = BC$ (рис. 6.46).

Тогда: $S_{BMC} + S_{AMD} = BC \cdot MH : 2 + AD \cdot MK : 2 = AD \cdot (MH +$ $+ MK) : 2 = AD \cdot HK : 2 = S_{ABCD} : 2$.

$MH + MK = HK$, так как точки H, M, K лежат на одной прямой (прямая, проведенная перпендикулярно к прямой AD через точку M, перпендикулярна и прямой BC, так как $AD \parallel BC$ по определению параллелограмма).

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за работу в группах в ходе изучения нового материала и самостоятельное решение задач.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Сформулируйте следствия теоремы о площади треугольника.

Домашнее задание

1. П. 53, вопрос 5 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 468 (в, г), 469, 473.
3. Решить задачу № 37 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительные задачи.

1) Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющих одинаковую площадь.

2) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, которая удалена от прямой CD на 4 см. Найдите площадь треугольника AOB, если $CD = 8$ см.

Урок 21. Площадь треугольника

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика готовят доказательства теорем у доски.)

1) Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.

2) Выведите формулу для вычисления площади прямоугольного треугольника.

3) Докажите, что если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

2. Решить задачи (письменно с последующей проверкой).

I уровень сложности

1. Рис. 6.47.

Найти: S_{ABC}.

2. *Дано:* $ABCD$ – квадрат, $AB = 5$ см, $KD = 4$ см (рис. 6.48).

Найти: S_{ABCK}.

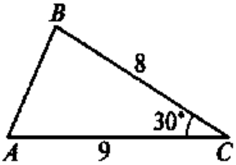


Рис. 6.47

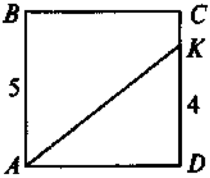


Рис. 6.48

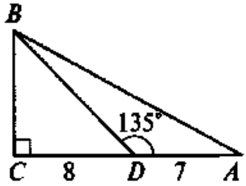


Рис. 6.49

3. Рис. 6.49.

Найти: S_{ABC}.

4. *Дано:* $AB = 10$ (рис. 6.50).

Найти: CD.

Ответы к задачам: 1) 36 см^2; 2) 15 см^2; 3) 120 см^2; 4) 4,8 см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены одна-две задачи;
- оценка «2» – не ставится.

II уровень сложности

1. В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 12 см и пересекаются под углом 30° друг к другу. Найдите площадь этого четырехугольника.

Решение: Проведем $BK \perp AC$, $DE \perp AC$ (рис. 6.51), тогда $S_{ABC} = AC \cdot BK : 2$, $S_{ADC} = AC \cdot DE : 2$, значит: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = AC \cdot BK : 2 + AC \cdot DE : 2 = AC \cdot (BK + DE) : 2$.

ΔBKO – прямоугольный, в нем $\angle BOK = 30°$, тогда $BK = BO : 2$.

ΔDEO – прямоугольный, в нем $\angle DOE = 30°$, тогда $DE = DO : 2$.

$S_{ABCD} = AC \cdot (BK + DE) : 2 = AC \cdot (BO : 2 + DO : 2) : 2 = AC \cdot (BO + DO) : 4 = AC \cdot BD : 4 = 8 \cdot 12 : 4 = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

2. Точка E – середина стороны AB треугольника ABC, а точки M и H делят сторону BC на три равные части, $BM = MH = HC$.

Рис. 6.50

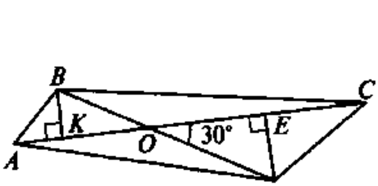


Рис. 6.51

Найдите площадь треугольника EMH, если площадь треугольника ABC равна S.

Решение: Высота ΔABC и ΔBCE, проведенная к сторонам AB и BE соответственно (рис. 6.52), – это один и тот же отрезок, т. е. высоты ΔABC и ΔBCE равны, тогда $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BCE} = AB : BE = 2 : 1$, т. е. $S_{\Delta BCE} = S : 2$.

Высоты ΔEBM, ΔEMH, ΔEHC равны, их площади относятся так же, как $BM : MH : CH$, а так как $BM = MH = CH$, то $S_{EBM} = S_{EMH} = S_{EHC} = S_{BCE} : 3 = S : 3 : 2 = S : 6$.

Ответ: $S : 6$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым решениям выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(Класс слушает доказательства теорем, подготовленных у доски.)

3. Проверка домашнего задания.

(Пока учащиеся у доски готовят теоретические вопросы, а остальные решают задачи, учитель индивидуально проверяет решение дополнительных задач.)

Задача № 1

Через точку O пересечения диагоналей проведем прямые $MK \perp AB$ и $NP \perp BC$ (рис. 6.53), тогда так как $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, то $NP \perp AD$, значит, OM, ON, OK, OP – высоты треугольников AOB, BOC, COD, DOA.

$S_{BOC} + S_{AOD} = BC \cdot ON : 2 + AD \cdot OP : 2 = BC \cdot (ON + OP) : 2 = BC \cdot NP : 2 = S_{ABCD} : 2$ ($BC = AD$, NP – высота параллелограмма, так как $NP \perp BC$, $NP \perp AD$).

Тогда $S_{BOC} = S_{AOD} = S_{ABCD} : 4$ ($\Delta BOC = \Delta DOA$ по двум сторонам и углу между ними).

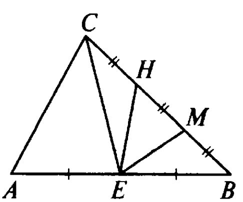


Рис. 6.52

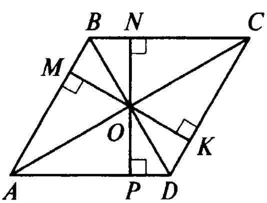


Рис. 6.53

$S_{AOB} + S_{COD} = AB \cdot OM : 2 + CD \cdot OK : 2 = AB \cdot (OM + OK) : 2 = AB \cdot MK : 2 = S_{ABCD} : 2$ ($AB = CD$, MK – высота параллелограмма).

Тогда $S_{AOB} = S_{COD} = S_{ABCD} : 4$ ($\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними).

Получили $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA} = S_{ABCD} : 4$, т. е. диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющих одинаковую площадь.

Задача № 2

$S_{ABD} = S_{ACD}$ (рис. 6.54), так как у них высоты, проведенные из вершин B и C к стороне AD, равны, а основание AD общее.

$S_{ABD} = S_{AOB} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{AOD} + S_{COD}$, отсюда так как $S_{ABD} = S_{ACD}$, то $S_{AOB} = S_{COD}$.

$S_{COD} = OK \cdot CD : 2 = 4 \cdot 8 : 2 = 16$ см^2, тогда $S_{AOB} = 16$ см^2.

Ответ: $S_{AOB} = 16$ см^2.

4. Решение задач для подготовки учащихся к восприятию нового материала (фронтальная работа).

1) *Дано:* CM – медиана ΔABC, CK – медиана ΔACM (рис. 6.55).

Найти: $S_{ACM} : S_{ABC}$; $S_{ACM} : S_{BCK}$; $S_{ACK} : S_{BCK}$.

2) *Дано:* M – середина AB, K – середина CD (рис. 6.56). $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

Доказать: $S_{MBKD} = S_{ABCD} : 2$.

III. Работа по теме урока

Сформулировать и доказать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема: Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = S$.

Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Доказательство:

1. Наложим $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC (рис. 6.57) (A и A_1 совпадают, A_1B_1 лежит на луче AB, A_1C_1 – на луче AC).

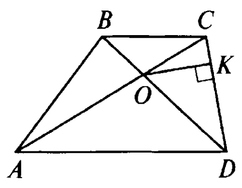


Рис. 6.54

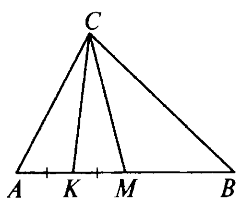


Рис. 6.55

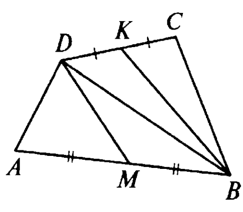
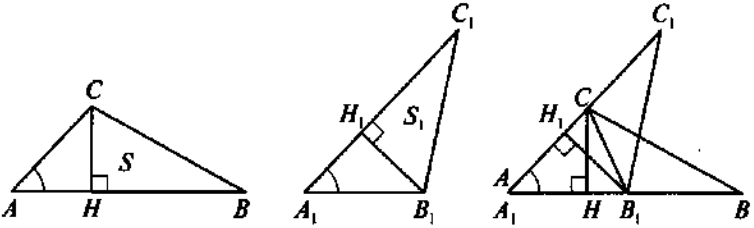


Рис. 6.56



а б в

Рис. 6.57

2. $S = S_{ABC} = AB \cdot CH,\ S_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 \cdot CH \Rightarrow \dfrac{S}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$. (1)

3. $S_{AB_1C} = AC \cdot B_1H_1, S_1 = S_{A_1B_1C_1} = A_1C_1 \cdot B_1H_1 \Rightarrow \dfrac{S_{AB_1C}}{S_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$. (2)

4. Перемножим равенства (1) и (2).

$\dfrac{S}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot \dfrac{S_{AB_1C}}{S_1} = \dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} \cdot \dfrac{AC}{A_1C_1}$, т. е. $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи (устно).

1) *Дано*: $\angle A = \angle K$, $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $KN = 7$ см, $KM = 2$ см (рис. 6.58).

Найти: $S_{ABC} : S_{KMN}$.

2) *Дано:* $OA = 8$ см, $OB = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 2$ см, $S_{AOB} = 20$ см^2 (рис. 6.59).

Найти: S_{COD}.

2. Решить задачи № 39, 40 (рабочая тетрадь).

3. Решить задачу (самостоятельно).

Площадь одного равностороннего треугольника в 3 раза больше, чем площадь другого равностороннего треугольника. Найдите сторону второго треугольника, если сторона первого равна 1.

4. Решить задачу № 479 (б) (самостоятельно).

Рис. 6.58

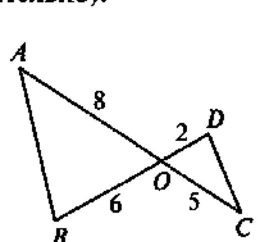


Рис. 6.59

V. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 12 см и 9 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь треугольника.

2. *Дано:* $AO = 4$, $BO = 9$, $CO = 5$, $DO = 8$, $S_{AOC} = 15$ (рис. 6.60).

Найти: S_{BOD}.

Вариант 2

1. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь треугольника.

2. *Дано:* $AO = 10$, $CO = 12$, $DO = 6$, $BO = 8$, $S_{BOD} = 14$ (рис. 6.61).

Найти: S_{AOC}.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $BC = 10$ см, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см, $DC = 8$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне BC.

2. *Дано*: $BO = AO$, $OC = 2OD$, $S_{AOC} = 12$ см^2 (рис. 6.62).

Найти: S_{BOD}.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см, а высота AD делит сторону CB на отрезки $CD = 8$ см, $DB = 6$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне AB.

2. *Дано*: $OB = OC$, $OD = 3OA$, $S_{AOC} = 16$ см^2 (рис. 6.63).

Найти: S_{BOD}.

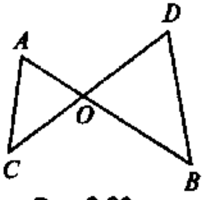


Рис. 6.60

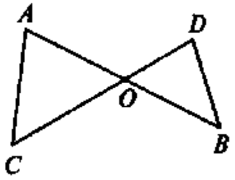


Рис. 6.61

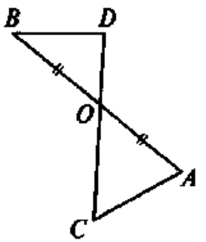


Рис. 6.62

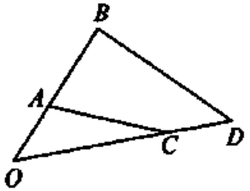


Рис. 6.63

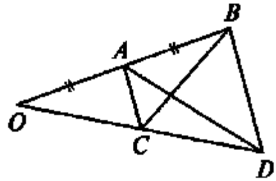


Рис. 6.64

III уровень сложности

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 30°$, $AB = 10$ см. Найдите площадь треугольника.

2. *Дано:* $OA = AB$, $AC \parallel BD$ (рис. 6.64).

Доказать: $S_{OBC} = S_{OAD}$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 75°$. Найдите BC, если площадь треугольника равна 36 см^2.

2. *Дано:* $AB = BC$, $BE \perp AD$, $CD \perp AD$ (рис. 6.65).

Доказать: $S_{ACD} = 4S_{ABE}$.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. В ΔABD $BD = 4{,}5$ см. $S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 12 \cdot 4{,}5 : 2 = 27$ см^2 (рис. 6.66).

Ответ: $S_{ABC} = 27$ см^2.

2. $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные, $\dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \dfrac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = \dfrac{4 \cdot 5}{9 \cdot 8} = 15 : S_{BOD}$; $S_{BOD} = 9 \cdot 8 \cdot 15 : 4 : 5 = 54$ см^2.

Ответ: $S_{BOD} = 54$ см^2.

Вариант 2

1. В ΔABD $BD = 3$ см, $S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 12$ см^2 (рис. 6.67).

Ответ: $S_{ABC} = 12$ см^2.

2. В ΔAOC и ΔBOD $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные, $\dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \dfrac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = \dfrac{10 \cdot 12}{8 \cdot 6} = \dfrac{S_{AOC}}{14}$; $S_{AOC} = 10 \cdot 12 \cdot 14 : 8 : 6 = 35$ см^2.

Ответ: $S_{AOC} = 35$ см^2.

II уровень сложности

Вариант 1

1. ΔABD – прямоугольный и равнобедренный (рис. 6.68), $BD = 6$ см, $S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 42$ см^2.

$S_{ABC} = BC \cdot h_{BC} : 2 = 42$; $h_{BC} = 2 \cdot 42 : 10 = 8{,}4$ см.

Ответ: 42 см^2; 8,4 см.

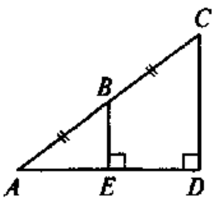


Рис. 6.65

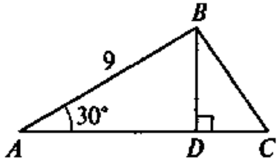


Рис. 6.66

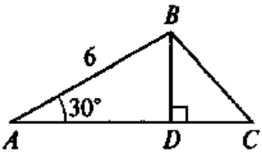


Рис. 6.67

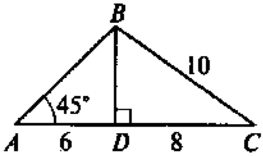


Рис. 6.68

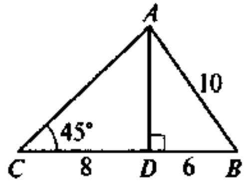


Рис. 6.69

2. $\angle BOD = \angle AOC$ как вертикальные, поэтому

$$\frac{S_{BOD}}{S_{AOC}} = \frac{BO \cdot DO}{AO \cdot CO} = \frac{BO \cdot DO}{BO \cdot 2 \cdot DO} = \frac{1}{2} = \frac{S_{BOD}}{12},\ S_{BOD} = 6\text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{BOD} = 6$ см^2.

Вариант 2

1. ΔCAD – прямоугольный и равнобедренный (рис. 6.69), $AD = 8$ см, $S_{ABC} = CB \cdot AD : 2 = 56$ см^2.

$S_{ABC} = AB \cdot h_{AB} : 2 = 56$; $h_{AB} = 56 \cdot 2 : 10 = 11{,}2$ см.

Ответ: 56 см^2; 11,2 см.

2. В ΔAOC и ΔBOD $\angle O$ – общий, поэтому

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = \frac{AO \cdot CO}{CO \cdot 3 \cdot AO} = \frac{1}{3} = \frac{16}{S_{BOD}},\ S_{BOD} = 16\text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{BOD} = 16$ см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $\angle C = 75°$, ΔABC – равнобедренный, $BC = 10$ см (рис. 6.70).

Из ΔCDB $CD = 5$ см, $S_{ABC} = AB \cdot CD : 2 = 25$ см^2.

Ответ: $S_{ABC} = 25$ см^2.

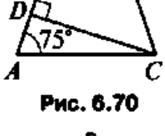


Рис. 6.70

2. По теореме Фалеса $OC = CD$, тогда $OD = 2OC$, $OB = 2OA$.

$$\frac{S_{OBC}}{S_{OAD}} = \frac{OB \cdot OC}{OA \cdot OD} = \frac{2 \cdot OA \cdot OC}{OA \cdot 2 \cdot OC} = 1,$$ т. е. $S_{OBC} = S_{OAD}$.

Вариант 2

1. ΔABC – равнобедренный, $\angle B = 30°$ (рис. 6.71), тогда в ΔCDB $CD = BC : 2$.

$S_{ABC} = AB \cdot CD : 2 = \frac{BC}{2} \cdot \frac{BC}{2} = 36$ см^2. $BC = 12$ см.

Ответ: $BC = 12$ см.

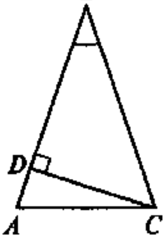


Рис. 6.71

2. $BE \parallel CD$, по теореме Фалеса $AE = ED$, тогда $AD = 2AE$, $AC = 2AB$.

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABE}} = \frac{AC \cdot AD}{AB \cdot AE} = \frac{2 \cdot AB \cdot 2 \cdot AE}{AB \cdot AE} = 4, \text{ т. е. } S_{ACD} = 4S_{ABE}.$$

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельную работу обучающего характера.)

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Сформулируйте теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Домашнее задание

1. П. 53, вопрос 6 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 476 (а), 477, 479 (а).
3. Решить задачу № 41 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительную задачу.

Дано: $AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 4$ см, $S_{AOC} + S_{BOD} = 39$ см^2 (рис. 6.72).

Найти: S_{AOC}.

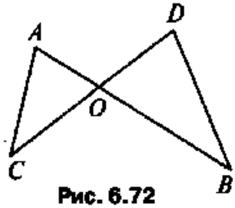


Рис. 6.72

Урок 22. Площадь трапеции

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему о площади трапеции и показать ее применение в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Сформулировать и доказать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

(Наиболее подготовленный ученик готовит доказательство теоремы у доски. Заслушать после проверки домашнего задания.)

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 476 (а) и дополнительной задачи. Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 476 (а)

Решение: Диагонали ромба разбивают его на четыре равных прямоугольных треугольника (рис. 6.73), следовательно, площади этих треугольников равны.

$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB.$

Так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то $AO = \frac{1}{2} \cdot AC$, $OB = \frac{1}{2} \cdot BD$, значит, $S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \times \times \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, т. е. площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$d_1 = 3{,}2$ дм, $d_2 = 14$ см, следовательно, $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \times \times 32 \cdot 14 = 224$ см^2.

Ответ: 224 см^2.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольниках AOB, BOC, COD, DOA?

– Чему равна площадь одного треугольника? А площадь ромба?

– Выразите стороны треугольника AOB через диагонали ромба.

Дополнительная задача

Решение: Треугольники AOC и BOD имеют равные углы ($\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные) (рис. 6.74), отсюда $\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \frac{OC \cdot OA}{OB \cdot OD} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8}$, следовательно, $S_{AOC} = \frac{5}{8}S_{BOD}$. Так как $S_{AOC} + S_{BOD} = 39$, то $\frac{5}{8}S_{BOD} + S_{BOD} = 39$, $S_{BOD} = 24$ см^2. $S_{AOC} = = 5 : 8 \cdot 24 = 15$ см^2.

Ответ: 15 см^2.

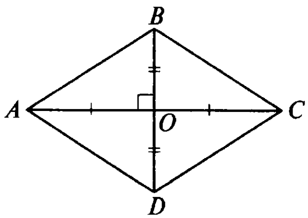


Рис. 6.73

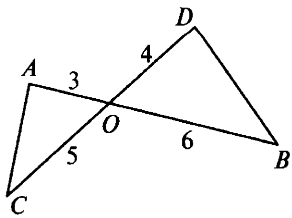


Рис. 6.74

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о площадях треугольников, имеющих равные углы?

– Выразите площадь одного из треугольников через площадь другого.

3. Решить задачу для подготовки к восприятию нового материала (работа в группах).

Найдите площадь трапеции *ABCD*, если основания *AD* и *BC* равны соответственно 12 см и 8 см, боковая сторона *AB* равна 6 см, $\angle A = 30°$.

Решение: Проведем высоту BK в треугольнике ABD, которая равна высоте в треугольнике BCD, т. е. $BK = DH$ (рис. 6.75).

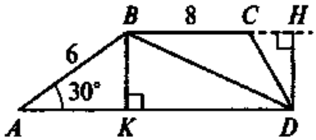


Рис. 6.75

$S_{ABD} = AD \cdot BK : 2$, $S_{BCD} = BC \cdot DH : 2$.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = AD \cdot BK : 2 + BC \cdot DH : 2$.

$BKDH$ – прямоугольник, поэтому $BK = DH$, тогда $S_{ABCD} = BK \cdot (AD + BC) : 2$.

Найдем BK из прямоугольного треугольника ABK, в котором $\angle A = 30°$, $AB = 6$ см. $BK = \frac{AB}{2} = 3$ см.

$S_{ABCD} = 3 \cdot (10 + 8) : 2 = 27$ см^2.

Ответ: $S_{ABCD} = 27$ см^2.

Наводящие вопросы и указания.

– Проведите высоты треугольников ABD и BCD из вершин B и D. Что можно о них сказать?

– Найдите площадь трапеции, как сумму площадей треугольников ABD и BCD.

– Как найти высоту BK треугольника ABD?

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие высоты трапеции.

Определение: Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание, называют высотой трапеции.

BH, DH_1 – высоты трапеции $ABCD$.

$BH = DH_1$ (рис. 6.76).

2. Решить задачу (работа в группах).

Найдите площадь трапеции $ABCD$, если основания AD и BC равны a и b соответственно, а высота – h.

(Обсуждение решения задачи.)

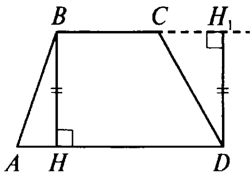


Рис. 6.76

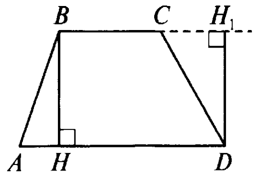


Рис. 6.77

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.77) и запись:

Теорема: Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Дано: $ABCD$ – трапеция, AD и BC – основания, BH – высота, S – площадь трапеции.

Доказать: $S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AD + BC)$.

Доказательство:

1) Проведем диагональ BD и вторую высоту трапеции DH_1.

2) $S = S_{ABD} + S_{BCD}$.

3) $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DH_1$.

4) HBH_1D – прямоугольник, следовательно, $BH = DH_1$.

5) $S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DH_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AD + BC)$.

Итак, мы вывели формулу для вычисления площади трапеции:

$$S_{\text{трап.}} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h,$$

где a и b – основания трапеции, h – высота трапеции.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 480 (а) (устно).

2. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 42.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

3. Решить задачу № 482.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 482

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, $\angle B = 135°$, BK – высота, $AK = 1{,}4$ см, $KD = 3{,}4$ см (рис. 6.78).

Найти: S_{ABCD}.

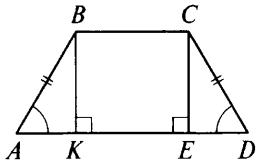


Рис. 6.78

Решение:

а) В ΔABK $\angle K = 90°$, $\angle ABK = 135° - \angle KBC = 45°$, тогда $\angle A = 90° - \angle ABK = 45°$, ΔABK – равнобедренный, $BK = AK = 1{,}4$ см.

б) Проведем высоту CE, тогда $KBCE$ – прямоугольник и $BC = KE$, а ΔDCE – прямоугольный, $\angle D = 45°$.

в) $\Delta ABK = \Delta DCE$ по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$), тогда $DE = AK = 1{,}4$ см, значит, $KE = 2$ см, $BC = 2$ см.

г) $AD = AK + KD = 1{,}4 + 3{,}4 = 4{,}8$ см.

д) $S_{ABCD} = (BC + AD) : 2 \cdot BK = (2 + 4{,}8) : 2 \cdot 1{,}4 = 4{,}76$ см^2.

Ответ: $S_{ABCD} = 4{,}76$ см^2.

Наводящие вопросы.

– Какая формула используется для вычисления площади трапеции?

– Что нам необходимо найти для вычисления площади трапеции?

– Как можно найти основания AD и BC?

4. Решить задачи (самостоятельно).

1) Высота и основания трапеции относятся как 5 : 6 : 4. Найдите меньшее основание трапеции, если площадь трапеции равна 88 см^2, а высота меньше оснований.

Ответ: 10 см.

2) Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 54 см^2.

Ответ: 6 см.

3) Основания равнобедренной трапеции 12 см и 16 см, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $S_{\text{трап.}} = 169$ см^2.

(Учащимся, успешно справившимся с решением задач № 1–3, можно выставить оценки.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Дайте определение высоты трапеции.
2. Сформулируйте теорему о площади трапеции.

Домашнее задание

1. П. 54, вопрос 7 (учебник, с. 133).
2. Повторить формулы для вычисления площади прямоугольника, квадрата, параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции.
3. Решить задачи № 476 (б), 478, 480 (б, в), 481.

Урок 23. Решение задач на вычисление площади

Основные дидактические цели урока: закрепить теоретический материал по теме «Площадь»; совершенствовать навыки решения задач на вычисление площадей фигур.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 478. Один ученик заранее готовит решение на доске.)

Задача № 478

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $CA \perp BD$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Доказательство: Треугольники AOB, BOC, COD, AOD прямоугольные (рис. 6.79). Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} \cdot ab$, где a и b – катеты треугольника, поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO$, $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO$, $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO$, $S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO$.

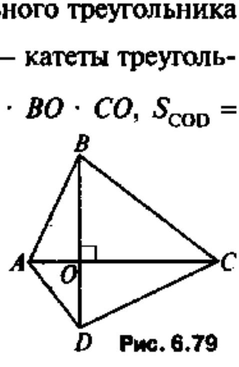


Рис. 6.79

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO + \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO + \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO + \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot (AO + CO) + \frac{1}{2} \times$

$\times\ DO \cdot (CO + AO) = \frac{1}{2} \cdot (BO + DO) \cdot (AO + CO) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$, так как $BO + DO = BD$, $AO + BO = AC$.

Наводящие вопросы.

– Существует ли формула для вычисления площади произвольного четырехугольника?
– Какие способы вычисления площадей вам известны?
– На какие геометрические фигуры, площади которых вычисляются по известным нам формулам, разбит выпуклый четырехугольник?
– Как вычислить площадь каждой фигуры? А площадь всего четырехугольника?
– Упростите полученное выражение.

2. Теоретический тест.

(Работа выполняется в тетрадях, по окончании работы учащиеся меняются тетрадями, проводится взаимопроверка и оценивание работ, а также обсуждение вопросов, по которым допущено наибольшее количество ошибок.)

Вариант 1

1. Выберите верное утверждение.
   а) площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон;
   б) площадь квадрата равна квадрату его стороны;
   в) площадь прямоугольника равна удвоенному произведению двух его соседних сторон.
2. Закончите фразу.

Площадь ромба равна половине произведения:
   а) его сторон;
   б) его стороны и высоты, проведенной к этой стороне;
   в) его диагоналей.
3. По формуле $S = a \cdot h_a$ можно вычислить площадь:
   а) параллелограмма;
   б) треугольника;
   в) прямоугольника.
4. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD и высотой BH вычисляется по формуле:
   а) $S = AB : 2 \cdot CD \cdot BH$;
   б) $S = (AB + BC) : 2 \cdot BH$;
   в) $S = (AB + CD) : 2 \cdot BH$;
5. Выберите верное утверждение.

Площадь прямоугольного треугольника равна:
   а) половине произведения его стороны на какую-либо высоту;

б) половине произведения его катетов;

в) произведению его стороны на проведенную к ней высоту.

6. В треугольниках ABC и MNK $\angle B = \angle N$. Отношение площадей треугольников ABC и MNK равно:

а) $\frac{AB \cdot BC}{MN \cdot NK}$; б) $\frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$; в) $\frac{BC \cdot AC}{NK \cdot MK}$.

7. В треугольниках MNK и POS высоты NE и OT равны. Тогда $S_{MNK} : S_{POS} = ...$

а) $MN : PO$; б) $MK : PS$; в) $NK : OS$.

Вариант 2

1. Выберите верное утверждение.

а) площадь квадрата равна произведению его сторон;

б) площадь прямоугольника равна произведению его противолежащих сторон;

в) площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

2. Закончите фразу.

Площадь параллелограмма равна произведению...

а) двух его соседних сторон;

б) его стороны на высоту, проведенную к этой стороне;

в) двух его сторон.

3. По формуле $S = d_1 d_2 : 2$ можно вычислить площадь:

а) параллелограмма;

б) треугольника;

в) ромба.

4. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD и высотой CH вычисляется по формуле:

а) $S = CH \cdot (BC + AD) : 2$;

б) $S = (AB + BC) \cdot CH : 2$;

в) $S = (BC + CD) \cdot CH : 2$;

5. Выберите верное утверждение.

Площадь треугольника равна:

а) половине произведения его сторон;

б) половине произведения его основания на высоту;

в) произведению его стороны на какую-либо высоту.

6. В треугольниках ABC и DEF $\angle C = \angle F$. Отношение площадей треугольников ABC и DEF равно:

а) $\frac{AC \cdot AB}{DE \cdot DF}$; б) $\frac{AB \cdot AC}{DE \cdot EF}$; в) $\frac{AC \cdot BC}{DF \cdot EF}$.

7. В треугольниках DEF и TRQ высоты DA и TB равны. Тогда $S_{DEF} : S_{TRQ} = ...$

а) $EF : RQ$; б) $DE : TR$; в) $EF : RT$.

Ответы к тесту:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
1	б	в	а	в	б	а	б
2	в	б	в	а	б	в	а

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно выполнены семь заданий;
- оценка «4» – правильно выполнены пять-шесть заданий;
- оценка «3» – правильно выполнены три-четыре задания;
- оценка «2» – правильно выполнены одно-два задания.

III. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 43.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачи (работа в парах с последующим обсуждением решения).

1) В трапеции $ABCM$ одно из оснований в 3 раза меньше другого, а высота составляет 75% большего основания. Площадь трапеции равна 72 см^2. Найдите основания и высоту трапеции.

Краткое решение: Пусть $BC = x$, $AD = 3x$ (рис. 6.80) $\Rightarrow$ $BH = 0{,}75 \cdot 3x = 2{,}25x$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}25x \cdot (x + 3x) = 4{,}5x^2 = 72$. $x^2 = 16$; $x = 4$. $BC = 4$, $AD = 12$, $BH = 9$.

Ответ: 4 см, 12 см, 9 см.

Наводящие вопросы для обучающихся, у которых при решении задачи возникли затруднения.

– Какая формула используется для вычисления площади трапеции?

– Выразите основания и высоту трапеции через переменную x и составьте уравнение, используя условия задачи.

2) В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD отмечена точка M такая, что $AM : MD = 3 : 2$. Найдите площадь ΔABM, если площадь параллелограмма равна 60 см^2.

Краткое решение: $S_{ABCD} = 60$ см^2 (рис. 6.81). $AM : MD = 3 : 2$.
$S_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = 30$ см^2.

$\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{AM \cdot BH_1}{MD \cdot CH_2} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}$, так как $BH_1 = CH_2$.

$S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ABCD} - 30 = 30 \Rightarrow S_{ABM} = 18$ см^2.

Ответ: 18 см^2.

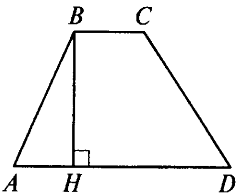


Рис. 6.80

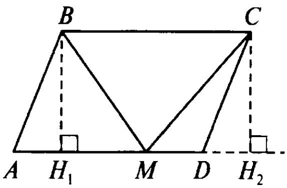


Рис. 6.81

Наводящие вопросы.

– Разбейте параллелограмм $ABCD$ на фигуры, площади которых можно вычислить.
– Какую часть занимает ΔBMC от параллелограмма?
– Чему равно отношение площадей треугольников ABM и CDM?
– Найдите площадь треугольника ABM.

3. Решить задачи (самостоятельно).

1) В параллелограмме $KMPT$ диагональ MT перпендикулярна стороне KM, $KM = 13$ см, $MT = 5$ см. Найдите площадь параллелограмма и его высоты, если $MP = 14$ см.

Ответ: $S = 65$ см^2, высоты равны 5 см и $4\frac{9}{14}$ см.

2) Стороны параллелограмма равны 12 см и 15 см, а угол между ними 30°. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: 90 см^2.

3) В ΔKMP высота MB делит сторону KP на отрезки 6 см и 8 см, $\angle MKP = 45°$. Найдите площадь ΔKMP.

Ответ: $S_{\text{KMP}} = 42$ см^2.

4) Периметр ромба $ABCK$ равен 68 см, периметр ΔABC равен 50 см, а периметр ΔBCK равен 64 см. Найдите: а) диагонали AC и BK; б) площадь ромба.

Ответ: а) 16 см и 30 см; б) 240 см^2.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – две задачи решены правильно, а при решении третьей задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решены одна задача, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – правильно решена одна задача.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за теоретический тест и за самостоятельное решение задач.)

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равна площадь параллелограмма, прямоугольника, квадрата, ромба, трапеции?
2. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
3. Сформулируйте теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 466, 467, 476 (б).
2. Решить задачу № 44 (рабочая тетрадь).
3. Решить дополнительную задачу.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ проведены высоты BK к стороне AD и высота DH к стороне BC. Найдите площадь четырехугольника $BKDH$, если площадь трапеции равна 89 дм^2.

Ответ: 89 дм^2.

Урок 24. Решение задач на вычисление площади

Основные дидактические цели урока: закрепить знания и умения по теме «Площадь»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Решить задачи по готовым чертежам (фронтальная работа).

I уровень сложности: № 1, 2, 3, 5, 7, 9 (устно).

II уровень сложности: № 1–9 (письменно с последующей самопроверкой).

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $BH = 8$ см (рис. 6.82).
Найти: BK.

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.83).
Найти: S_{ABCD}.

3. Рис. 6.84.
Найти: S_{ABC}.

4. Рис. 6.85.
Найти: S_{ABC}.

5. Рис. 6.86.
Найти: S_{ABC}.

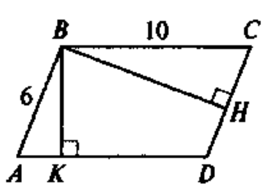


Рис. 6.82

6. Рис. 6.87.

Найти: S_{ABC}.

7. *Дано:* $AC = 12$ см, $S_{ABCD} = 48$ см^2 (рис. 6.88).

Найти: BD.

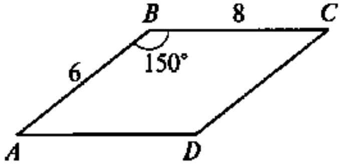


Рис. 6.83

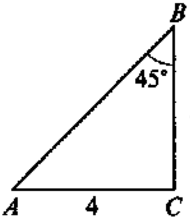


Рис. 6.84

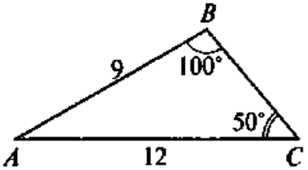


Рис. 6.85

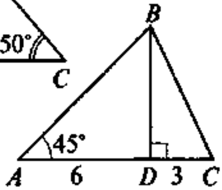


Рис. 6.86

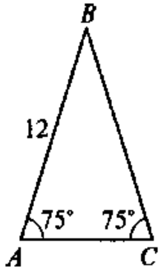


Рис. 6.87

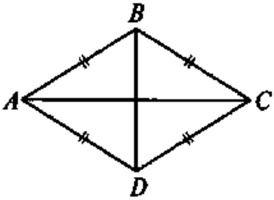


Рис. 6.88

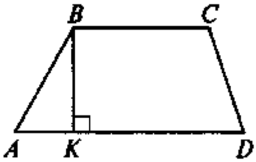


Рис. 6.89

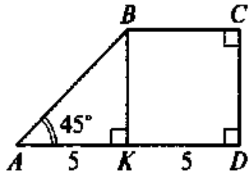


Рис. 6.90

8. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $BC : AD = 2 : 3$, $BK = 6$ см, $S_{ABCD} = 60$ см^2 (рис. 6.89).

Найти: BC, AD.

9. Рис. 6.90.

Найти: S_{ABCD}.

Ответы к задачам по готовым чертежам: 1) $BK = 4{,}8$ см; 2) $S_{ABCD} = 24$ см^2; 3) $S_{ABC} = 8$ см^2; 4) $S_{ABC} = 27$ см^2; 5) $S_{ABC} = 27$ см^2; 6) $S_{ABC} = 36$ см^2; 7) $BD = 8$ см; 8) $BC = 8$ см, $AD = 12$ см; 9) $S_{ABCD} = 37{,}5$ см^2.

III. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Сторона параллелограмма равна 21 см, а высота, проведенная к ней, равна 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

2. Сторона треугольника равна 5 см, а высота, проведенная к ней, в 2 раза больше стороны. Найдите площадь треугольника.

3. В трапеции основания равны 6 см и 10 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.

4. Стороны параллелограмма равны 6 см и 8 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

5. Диагонали ромба относятся как 2 : 3, а их сумма равна 25 см. Найдите площадь ромба.

Вариант 2

1. Сторона параллелограмма равна 17 см, а его площадь равна 187 см^2. Найдите высоту, проведенную к данной стороне.

2. Сторона треугольника равна 18 см, а высота, проведенная к ней, в 3 раза меньше стороны. Найдите площадь треугольника.

3. В трапеции основания равны 4 см и 12 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.

4. Стороны параллелограмма равны 4 см и 7 см, а угол между ними равен 150°. Найдите площадь параллелограмма.

5. Диагонали ромба относятся как 3 : 5, а их разность равна 8 см. Найдите площадь ромба.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике ABC высота BH равна 12 см, а основание AC в 3 раза больше высоты BH. Найдите площадь ΔABC.

2. В параллелограмме $ABCD$ стороны равны 14 см и 8 см, высота, проведенная к большей стороне, равна 4 см. Найдите площадь параллелограмма и вторую высоту.

3. Площадь трапеции равна 320 см^2, а высота трапеции равна 8 см. Найдите основания трапеции, если длина одного из оснований составляет 60% длины другого.

4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 14 см и 18 см. Сторона AB продолжена за точку A на отрезок AM, равный AB. Сторона BC продолжена за точку C на отрезок KC, равный половине BC. Найдите площадь ΔMBK, если площадь ΔABC равна 126 см^2.

5. В ромбе $ABCK$ из вершин B и C опущены высоты BM и CH на прямую AK. Найдите площадь четырехугольника $MBCH$, если площадь ромба равна 67 см^2.

Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике ABC высота AH в 4 раза меньше основания BC, равного 16 см. Найдите площадь ΔABC.

2. В параллелограмме $ABCD$ высоты равны 10 см и 5 см, площадь параллелограмма равна 60 см^2. Найдите стороны параллелограмма.

3. В равнобокой трапеции $ABCM$ большее основание AM равно 20 см, высота BH отсекает от AM отрезок AH, равный 6 см. Угол BAM равен 45°. Найдите площадь трапеции.

4. В ромбе $ABCD$ на стороне BC отмечена точка K такая, что $KC : BK = 3 : 1$. Найдите площадь ΔABK, если площадь ромба равна 48 см^2.

5. В ΔABM через вершину B проведена прямая d, параллельная стороне AM. Из вершин A и M проведены перпендикуляры AC и MD на прямую d. Найдите площадь четырехугольника $ACDM$, если площадь треугольника ABM равна 23 см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Площадь параллелограмма равна 48 см^2, а его периметр равен 40 см. Найдите стороны параллелограмма, если высота, проведенная к одной из них, в 3 раза меньше этой стороны.

2. В ромбе $ABCD$ диагонали равны 5 см и 12 см. На диагонали AC взята точка M так, что $AM : MC = 4 : 1$. Найдите площадь треугольника AMD.

3. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на два отрезка, больший из которых равен 20 см. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см.

4. В треугольнике ABC $\angle B = 130°$, $AB = a$, $BC = b$, а в параллелограмме $MPKH$ $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50°$. Найдите отношение площади треугольника к площади параллелограмма.

5. В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания, $BC : AD = 3 : 4$. Площадь трапеции равна 70 см^2. Найдите площадь ΔABC.

Вариант 2

1. Площадь параллелограмма равна 50 см^2, а его периметр равен 34 см. Найдите стороны параллелограмма, если одна из них в 2 раза больше проведенной к ней высоты.

2. В прямоугольном ΔABC точка O – середина медианы CH, проведенной к гипотенузе AB, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите площадь треугольника OBC.

3. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями равен 90°, высота трапеции равна 8 см. Найдите площадь трапеции.

4. В треугольнике ABC $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15°$, а в треугольнике MPK $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165°$. Сравните площади этих треугольников.

5. В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания, $BC : AD = 4 : 5$. Площадь треугольника ACD равна 35 см^2. Найдите площадь трапеции.

(Самостоятельная работа III уровня сложности рассчитана на весь урок. Этап актуализации знаний проводится с учащимися, которые в дальнейшем будут решать задачи I или II уровня сложности. К задачам № 1–3 учащиеся должны начертить рисунок и записать краткое решение или только ответ, к задачам № 4, 5 – записать полное решение. В зависимости от уровня подготовленности класса количество обязательных задач можно сократить до четырех.)

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равна площадь параллелограмма, прямоугольника, квадрата, ромба, трапеции?
2. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
3. Сформулируйте теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Домашнее задание

1. Решить первый вариант самостоятельной работы следующего уровня сложности.
2. Учащимся, решавшим самостоятельную работу III уровня сложности, решить дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

1) В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $AD : BC = 2 : 1$. Точка E – середина стороны BC трапеции. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 60 см^2.

2) В трапеции $MPHK$ MK – большее основание. Площади треугольников MHK и KHP равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.

3) *Дано:* ΔABC – равнобедренный, AC – основание, $KT \parallel BC$, $HP \parallel AB$, $EO \parallel AC$ (рис. 6.91).

Доказать: $S_{AEMH} : S_{MOCT} = BP : BK$.

4) В ромбе $ABCD$ BM – биссектриса треугольника ABD, $\angle BMD = 157°30'$. Найдите площадь ромба, если его высота – 10 см.

5) *Дано:* $ABCD$ – ромб, $HT \parallel AB$, $MP \parallel BC$ (рис. 6.92).

Доказать: $S_{AMOT} : S_{OHCP} = S_{MBHO} : S_{TOPD}$.

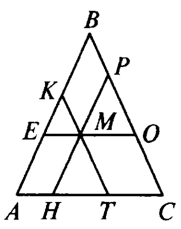


Рис. 6.91

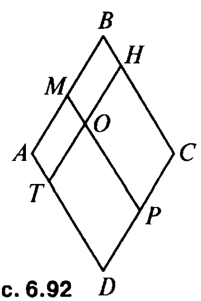


Рис. 6.92

Урок 25. Теорема Пифагора

Основная дидактическая цель урока: рассмотреть теорему Пифагора и показать ее применение в ходе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.
2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.
3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

(Ответы и указания выдаются в распечатанном виде каждому ученику.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. $S = a \cdot h_a = 21 \cdot 15 = 315$ см^2.
2. $S_\Delta = h_a \cdot a : 2 = 10 \cdot 5 : 2 = 25$ см^2.
3. $h = \dfrac{6+10}{2} = 8$ см. $S_{\text{трап}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{6+10}{2} \cdot 8 = 64$ см^2.
4. $BK = 3$ см; $S = 8 \cdot 3 = 24$ см^2 (рис. 6.93).
5. $d_1 + d_2 = 25$; $d_1 = 2k$ см; $d_2 = 3k$ см; $k = 5$.

$d_1 = 10$ см; $d_2 = 15$ см. $S = \dfrac{d_1 d_2}{2} = 10 \cdot 15 : 2 = 75$ см^2.

Вариант 2

1. $h_a = a : S = 187 : 17 = 11$ см.
2. $S_\Delta = h_a \cdot a : 2 = 6 \cdot 18 : 2 = 54$ см^2.

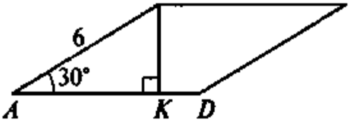


Рис. 6.93

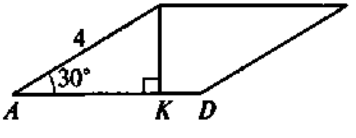


Рис. 6.94

3. $h = \dfrac{12-4}{2} = 4$ см. $S_{\text{трап}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{12+4}{2} \cdot 4 = 32$ см^2.

4. $BK = 2$ см; $S = 7 \cdot 2 = 14$ см^2 (рис. 6.94).

5. $d_1 = 3k$ см; $d_2 = 5k$ см; $d_2 - d_1 = 8$; $k = 4$.

$d_1 = 12$ см; $d_2 = 20$ см. $S = \dfrac{d_1 d_2}{2} = 12 \cdot 20 : 2 = 120$ см^2.

II уровень сложности

Вариант 1

1. $S = AC \cdot BH : 2 = 36 \cdot 12 : 2 = 216$ см^2.
2. $S = 4 \cdot 14 = 56$ см^2, $h_2 = S : 8 = 56 : 8 = 7$ см.
3. $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$. $a = 0{,}6b$, $S = \dfrac{0{,}6b+b}{2} \cdot h$, $b = 50$ см, $a = 30$ см.

4. Если высоты двух треугольников равны, то площади относятся как основания. ΔABC и ΔACM имеют общую высоту (рис. 6.95), а основания AB и AM равны, поэтому $S_{ACM} = S_{ABC} = 126$ см^2, $S_{MBC} = 25$ см^2. ΔMBC и ΔMCK имеют общую высоту, а основание BC в два раза больше основания CK, поэтому $S_{MCK} = S_{MBC} : 2 = 126$ см^2, $S_{MBK} = 378$ см^2.

5. $\Delta ABM = \Delta KCH$ по гипотенузе и острому углу.
$S_{MBCH} = S_{MBA} + S_{ABCH} = S_{KCH} + S_{ABCH} = S_{ABCK} = 67$ см^2.

Вариант 2

1. $S = BC \cdot AH : 2 = 16 \cdot 4 : 2 = 32$ см^2.
2. $S_{ABCD} = AB \cdot h_1 = BC \cdot h_2$. $60 = 10 \cdot h_1 = 5 \cdot h_2$.
$h_1 = 6$ см, $h_2 = 12$ см.
3. $AH = 6$ см, $BH = 6$ см. $BC = AM - 2AH = 8$ см.
$S = \dfrac{AM + BC}{2} \cdot BH = 84$ см^2.

4. $S_{ABC} = 24$ см^2 (рис. 6.96). Если высоты двух треугольников равны, то площади относятся как основания. ΔABK и ΔAKC имеют общую высоту, а основание KC в 3 раза больше основания BK. $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{AKC} = 24$, отсюда $S_{ABK} = 6$ см^2.

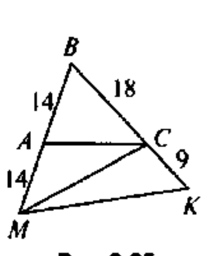


Рис. 6.95

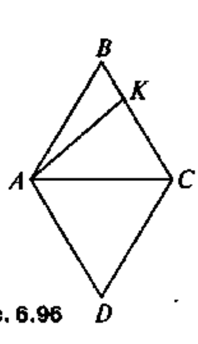


Рис. 6.96

5. Проведем высоту в ΔABM. $\Delta ABC = \Delta BAE$, $\Delta MBD = \Delta BME$ по гипотенузе и острому углу. $S_{ACDM} = S_{ABC} + S_{BAE} + S_{MBD} + S_{BME} = 2 \cdot (S_{BAE} + S_{BME}) = 2 \cdot S_{ABM} = 46$ см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Пусть $BK = x$ см, $AD = 3x$ см (рис. 6.97).

$S_{ABCD} = BK \cdot AD = x \cdot 3x = 48$, откуда $x = 4$ см, тогда $AD = 12$ см. $P_{ABCD} = 40$ см, $AD = 12$ см, тогда $AB = 8$ см.

2. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 5 \cdot 12 : 2 = 30$ см^2, $S_{ACD} = S_{ABCD} : 2 = 15$ см^2. ΔADM и ΔMDC имеют общую высоту, значит, $\dfrac{S_{ADM}}{S_{MDC}} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{4}{1}$. Так как $S_{ACD} = S_{ADM} + S_{MDC} = 15$ см^2, то $S_{ADM} = 12$ см^2.

3. $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BK = \dfrac{20 + x + 20 - x}{2} \cdot 12 = 240$ см^2 (рис. 6.98).

4. $S_{ABC} : S_{MPKH} = 1 : 2$.

5. ΔABC и ΔACD имеют равные высоты, поэтому: $S_{ABC} : S_{ACD} = BC : AD = 3 : 4$. Так как $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 70$ см^2, то $S_{ABC} = 30$ см^2.

Вариант 2

1. Пусть $BK = x$ см, тогда $AD = 2x$ см (рис. 6.99). $S_{ABCD} = BK \cdot AD = x \cdot 2x = 50$, откуда $x = 5$ см, тогда $AD = 10$ см. $P_{ABCD} = 34$ см, $AD = 10$ см и $AB = 7$ см.

2. $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$ см^2. Медиана делит ΔABC на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{CBH} = S_{ABC} : 2 = 12$ см^2. В ΔBCH BO – медиана, тогда $S_{OBC} = S_{BCH} : 2 = 6$ см^2.

3. $\angle 1 = \angle 2 = 45°$, $\angle 3 = \angle 4 = 45°$ (рис. 6.100). $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot EH = \dfrac{(8 - x + 8 - x) + (x + x)}{2} \cdot 8 = 64$ см^2.

4. $S_{ABC} = S_{MPK}$.

5. ΔABC и ΔACD имеют равные высоты, $S_{ABC} : S_{ACD} = BC : AD = 4 : 5$, тогда так как $S_{ACD} = 35$ см^2, то $S_{ABC} = 28$ см^2, $S_{ABCD} = 63$ см^2.

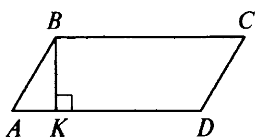


Рис. 6.97

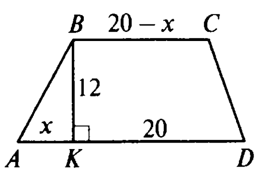


Рис. 6.98

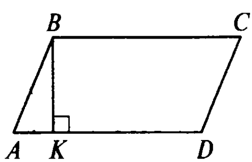


Рис. 6.99

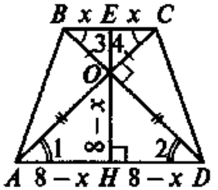


Рис. 6.100

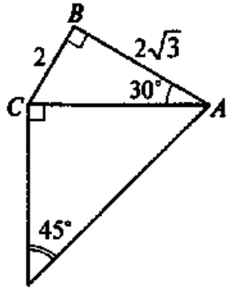


Рис. 6.101

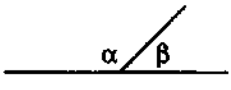


Рис. 6.102

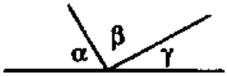


Рис. 6.103

Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1) Рис. 6.101.
Найти: S_{ABCD}.
2) Рис. 6.102.
Найти: β.
3) Рис. 6.103.
Найти: β.
4) Рис. 6.104.
Доказать: $MNPK$ – квадрат.

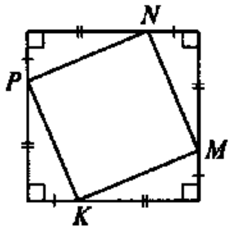


Рис. 6.104

III. Работа по теме урока

Историческая справка. Существует замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника, справедливость которого была доказана древнегреческим философом и математиком Пифагором (VI в. до н. э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Доказать теорему Пифагора.

Теорема: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.105) и запись:

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

а) Достроить ΔABC до квадрата $CKPD$ со стороной $(a + b)$; $S_{CKPD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

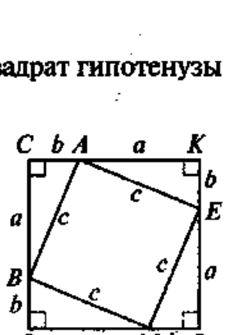


Рис. 6.105

б) $\Delta BCA = \Delta AKE = \Delta EPM = \Delta MDB$ по двум катетам. $S_{\text{BCA}} = S_{\text{AKE}} = S_{\text{EPM}} = S_{\text{MDB}} = \frac{ab}{2}$.

в) $BAEM$ – квадрат, $S_{\text{BAEM}} = c^2$.

г) $S_{\text{CKPD}} = S_{\text{BAEM}} + S_{\text{BCA}} + S_{\text{AKE}} + S_{\text{EPM}} + S_{\text{MDB}} = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи № 483 (а, б), 484 (а, б) (устно).

2. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 45, 46.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить задачу № 46.)

3. Решить задачу № 487 (работа в парах).

Задача № 487

Дано: ΔABC – равнобедренный, $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, BD – высота (рис. 6.106).

Найти: BD.

Решение:

а) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, поэтому $AD = AC : 2 = 16 : 2 = 8$ см.

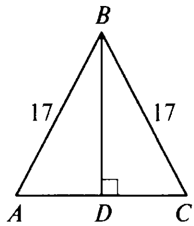


Рис. 6.106

б) ΔABD – прямоугольный. По теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + BD^2$, откуда $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 17^2 - 8^2 = 225$. Так как $BD > 0$, то $BD = 15$ см.

Наводящие вопросы.

– Сформулируйте свойство высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника.

– Какая связь существует между сторонами прямоугольного треугольника?

– Запишите теорему Пифагора для треугольника ABD.

4. Решить задачи № 485, 486 (б).

5. Решить дополнительные задачи.

1) Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см.

Ответ: $S_{\text{ABCD}} = 50$ см².

2) Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 42 см².

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Как вычислить катет прямоугольного треугольника, если известны его гипотенуза и второй катет?

Домашнее задание

1. П. 55, вопрос 8 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 483 (в, г), 484 (в–д), 486 (в).
3. Решить задачу № 47 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительные задачи.

1) В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции – 24 см, меньшее основание – 7 см. Найдите площадь трапеции и вторую боковую сторону.

2) В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

Урок 26. Теорема, обратная теореме Пифагора

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему, обратную теореме Пифагора, и показать ее применение в процессе решения задач; закрепить теорему Пифагора и совершенствовать навыки решения задач на ее применение.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Сформулировать и доказать теорему Пифагора.

(Наиболее подготовленный ученик готовит доказательство теоремы у доски. Заслушать после решения задач по готовым чертежам.)

2. Решение задач по готовым чертежам.

1) Рис. 6.107.

Найти: AB.

2) Рис. 6.108.

Найти: BC.

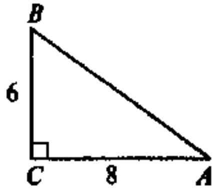


Рис. 6.107

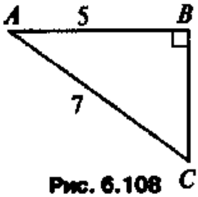


Рис. 6.108

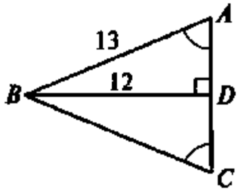


Рис. 6.109

3) Рис. 6.109.
Найти: AC.
4) Рис. 6.110. *Дано: ABCD* ромб.
Найти: BC.
5) Рис. 6.111. *Дано: ABCD* – прямоугольник, $AB : AD = 3 : 4$.
Найти: AD.
6) Рис. 6.112.
Найти: AB.
7) Решить задачу № 48 (рабочая тетрадь).
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $AB = 10$ см.
2) $BC = 2\sqrt{6}$ см.
3) $AC = 10$ см.
4) $BC = 3$.
5) $AD = 4$ см.
6) $AB = 3\sqrt{2}$ см.
7) $AC = 24$ см, $S_{\text{ABCD}} = 120$ см^2.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решены шесть-семь задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – правильно решены одна-две задачи.

3. Фронтальная работа с классом (устно).

Сформулируйте утверждения, обратные данным, и выясните, верны ли они.

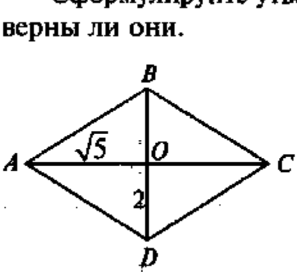


Рис. 6.110

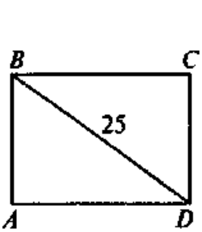


Рис. 6.111

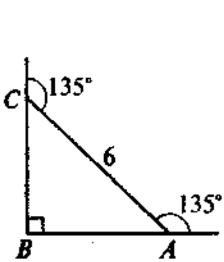


Рис. 6.112

а) Сумма смежных углов равна 180°.

б) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

в) Вертикальные углы равны.

г) В параллелограмме противолежащие стороны равны.

д) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

(В последнем случае учащиеся смогут сформулировать утверждение, обратное данному, а его справедливость докажет учитель.)

III. Работа по теме урока

Дано: ΔABC, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Выяснить, является ли ΔABC прямоугольным.

(Учитель решает у доски, учащиеся – в тетрадях.)

Решение:

а) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ такой, что $\angle C = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$.

б) Так как $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, то: $A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, следовательно, $AB^2 = A_1B_1^2$ и $AB = A_1B_1$.

в) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90°$, т. е. ΔABC – прямоугольный.

Теорема: Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Данное утверждение называют ***теоремой, обратной теореме Пифагора***.

Прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются целыми числами, называются ***пифагоровыми треугольниками***. Например, треугольник со сторонами 26, 24 и 10.

– Приведите примеры пифагоровых треугольников. (*10, 8 и 6; 13, 12 и 5; 5, 4 и 3; 15, 12 и 9 и др.*)

Являются ли пифагоровыми треугольниками треугольники:

а) с гипотенузой 25 и катетом 15;

б) с катетами 5 и 4?

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 был известен еще древним египтянам. Они использовали его для построения прямых углов: на веревке делали метки, делящие ее на 12 равных частей, связывали концы веревки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Угол, лежащий против стороны, равной 5, оказывался прямым. Этот треугольник получил название ***египетского треугольника*** и по сей день именно так его и называют.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 498 (а–в) (устно).
2. Решить задачу № 499 (а).

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 499 (а)

$25^2 = 24^2 + 7^2$, значит, треугольник прямоугольный и его площадь равна половине произведения его катетов, т. е. $S = 24 \cdot 7 : 2 = 84$ см^2.

Меньшая высота проведена к большей стороне, а в прямоугольном треугольнике большей стороной является гипотенуза, значит, $S = h_C \cdot c : 2$, где c – гипотенуза, h_C – высота, проведенная к гипотенузе, тогда $h_C = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 84}{25} = 6{,}72$ см.

Ответ: 6,72 см.

Наводящие вопросы.

– Как проверить, является ли треугольник прямоугольным?
– К какой из сторон будет проведена меньшая высота треугольника?
– Какой способ вычисления высоты треугольника часто используют в геометрии?
– Используя формулу для вычисления площади треугольника, найдите нужную высоту.

3. Решить задачи (самостоятельно).

1) Определите углы треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$.

Ответ: 45°, 45°, 90°.

2) В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите AC.

Ответ: $1 + \sqrt{3}$.

3) В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.

Ответ: 75°.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
2. Какой треугольник называется пифагоровым, египетским?

Домашнее задание

1. П. 56, вопросы 9, 10 (учебник, с. 133).
2. Решить задачи № 488, 498 (г–е), № 499 (б).
3. Решить задачу № 49 (рабочая тетрадь).
4. Решить дополнительные задачи.

1) Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а основания – 30 см и 15 см. Найдите угол, который образуют продолжения боковых сторон трапеции.
2) Диагонали трапеции равны 5 см и 12 см, а основания – 3 см и 10 см. Найдите углы между диагоналями этой трапеции.

Урок 27. Решение задач по теме «Теорема Пифагора»

Основные дидактические цели урока: закрепить знание теоремы Пифагора и теоремы, обратной теореме Пифагора; совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы Пифагора и теоремы, обратной теореме Пифагора.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос (фронтальная работа).

1) Сформулировать теорему Пифагора.
2) Сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора.

2. Индивидуальное задание (письменно).

1) Доказать теорему Пифагора (два ученика).
2) Доказать теорему, обратную теореме Пифагора (два ученика).

3. Самостоятельное решение задач по готовым чертежам.

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 6.113).
Найти: CD.
2) *Дано:* $DE \parallel AC$ (рис. 6.114).
Найти: AC.
3) *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 6.115).
Найти: CF.

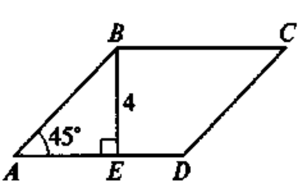


Рис. 6.113

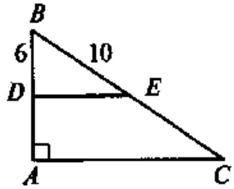


Рис. 6.114

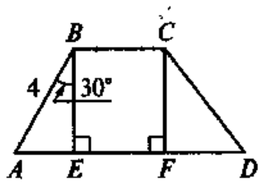


Рис. 6.115

4) Рис. 6.116.
Найти: BD.
5) *Дано: ABCD* – квадрат (рис. 6.117).
Найти: AO.
6) Рис. 6.118.
Найти: DC, AC, AB.
7) Рис. 6.119.
Найти: BD.
8) *Дано: ABCD* – параллелограмм (рис. 6.120).
Найти: AD.
9) *Дано:* ΔABC – равносторонний (рис. 6.121).
Найти: AO, OE.
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $CD = 4\sqrt{2}$.
2) $AC = 16$.
3) $CF = 2\sqrt{3}$.
4) $BD = 5$.
5) $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

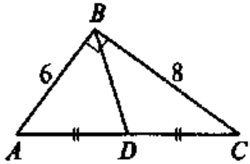


Рис. 6.116

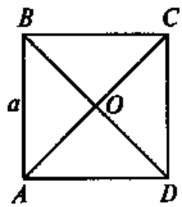


Рис. 6.117

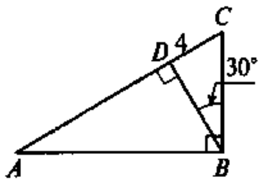


Рис. 6.118

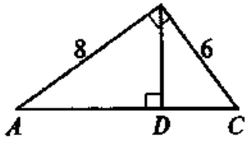


Рис. 6.119

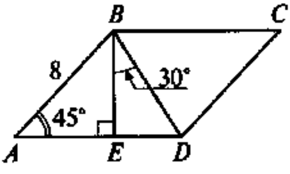


Рис. 6.120

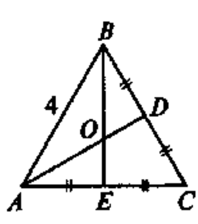


Рис. 6.121

6) $DC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{3}$, $AB = 16$.

7) $BD = 4{,}8$.

8) $AD = 4\sqrt{2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

9) $OE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

III. Решение задач

Решить задачи № 492, 495 (а), записав краткое решение (работа в парах).

Задача № 492

Краткое решение: Из ΔABD $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ см (рис. 6.122).

ΔABC – равнобедренный $\Rightarrow CH = AK$. $S_{\text{ABC}} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \times$ $\times\ CH \cdot AB \Rightarrow CH = \dfrac{AC \cdot BD}{AB} = \dfrac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$ см.

Ответ: 8 см; 9,6 см; 9,6 см.

Вопросы для обсуждения.

– Какую высоту проще всего найти в треугольнике ABC? Почему?
– Какой способ нахождения высоты необходимо использовать для того, чтобы найти высоту, проведенную к боковой стороне данного равнобедренного треугольника?
– Что можно сказать о высотах равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам?

Задача № 495 (а)

Краткое решение: $DK = CE$ ($\Delta ADK = \Delta CBE$ по гипотенузе и острому углу), $ABEK$ – прямоугольник, тогда $KE = 10$ см, $DK = \dfrac{20 - 10}{10} = 5$ см (рис. 6.123).

ΔADK – прямоугольный $\Rightarrow AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

$S_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot AK \cdot (AB + CD) = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot (10 + 20) = 180$ см^2.

Ответ: 180 см^2.

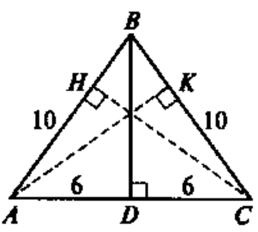


Рис. 6.122

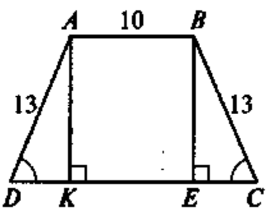


Рис. 6.123

Вопросы для обсуждения.

– Какой формулой вы пользовались для вычисления площади трапеции?

– Как вы нашли высоту трапеции?

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Диагонали ромба равны 14 см и 48 см. Найдите сторону ромба.

2. В треугольнике два угла равны 45° и 90°, а большая сторона – 20 см. Найдите две другие стороны треугольника.

Вариант 2

1. Стороны прямоугольника равны 8 см и 12 см. Найдите его диагональ.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 6$ см. Найдите стороны треугольника.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольной трапеции основания равны 5 см и 17 см, а большая боковая сторона – 13 см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике две стороны равны 10 см и 12 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2

1. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 15 см и 9 см, а большее основание – 20 см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике две стороны равны 12 см и 8 см, а угол между ними 60°. Найдите площадь треугольника.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 2\sqrt{41}$ см, $AC = 26$ см, $AD = 16$ см. Через точку O – точку пересечения диагоналей параллелограмма – проведена прямая, перпендикулярная стороне BC. Найдите отрезки, на которые эта прямая разделила сторону AD.

2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Высота AK делит сторону BC на отрезки $BK = 24$ см и $KC = 1$ см. Найдите площадь треугольника и сторону AC.

Вариант 2

1. Две окружности радиусами 13 см и 15 см пересекаются. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 14 см. Общая хорда этих окружностей AB пересекает отрезок O_1O_2 в точке K. Найдите O_1K и KO_2 (O_1 – центр окружности радиусом 13 см).

2. В треугольнике ABC $AB = AC$. Высота BM равна 9 см и делит сторону AC на два отрезка так, что AM = 12 см. Найдите площадь и периметр треугольника.

Дополнительные задачи

Вариант 1

1. На продолжении диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка M, которая соединена с вершиной B. Докажите, что $AM \cdot CM = MB^2 - AB^2$.

2. В ΔABC BD – высота, проведенная из вершины прямого угла. Используя теорему Пифагора, докажите, что $BD^2 = AD \cdot DC$.

Вариант 2

1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна x. Произвольная точка M на катете BC соединена с вершиной A, а точка H на катете AC соединена с вершиной B. Найдите длину отрезка MH, если $AM^2 + BH^2 = y^2$.

2. В треугольнике ABC BD – высота, проведенная их вершины прямого угла. Используя формулу площади треугольника и теорему Пифагора, докажите, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 489 (а, в), 491 (а), 493.
2. Решить задачу № 50 (рабочая тетрадь).
3. Решить дополнительную задачу.

В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями боковая сторона равна 26 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, меньший из которых равен 10 см. Найдите площадь трапеции.

Урок 28. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Основные дидактические цели урока: закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Площадь»; совершенствовать навыки решения задач; подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. Так как $AC = 14$ см, $BD = 48$ см, то $AO = 7$ см, $BO = 24$ см (рис. 6.124). $AB^2 = AO^2 + BO^2 = 7^2 + 24^2 = 625$. $AB = 25$ см.

Ответ: $AB = 25$ см.

2. ΔABC – прямоугольный, равнобедренный (рис. 6.125). $x^2 + x^2 = 20^2$; $x = 10\sqrt{2}$.

Ответ: $AC = 10\sqrt{2}$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$. $AC = 4\sqrt{13}$ см (рис. 6.126).

Ответ: $4\sqrt{13}$ см.

2. Так как $\angle B = 30°$, $\angle A = 90°$, то $AC = BC : 2$, т. е. $AC = x$ см, $BC = 2x$ см (рис. 6.127). $x^2 + 6^2 = (2x)^2$; $x = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $AC = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Проведем $CE \perp AD$ (рис. 6.128). $CD^2 = CE^2 + DE^2$; $CE = 5$ см. $S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 55$ см^2.

Ответ: 55 см^2.

2. Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = BE = x$ см, $\angle E = 90°$, $AB^2 = x^2 + x^2$, откуда $x = 5\sqrt{2}$ см^2 (рис. 6.129). $S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 30\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $30\sqrt{2}$ см^2.

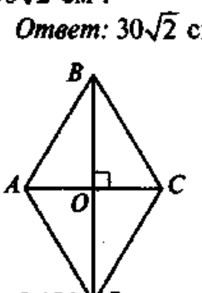


Рис. 6.124

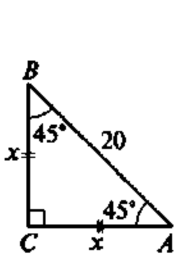


Рис. 6.125

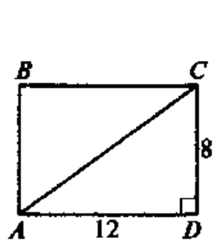


Рис. 6.126

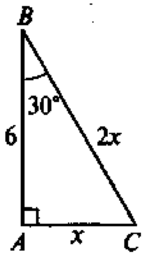


Рис. 6.127

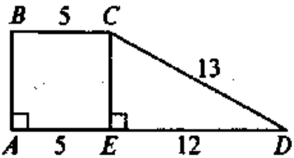


Рис. 6.128

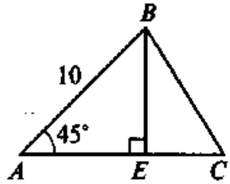


Рис. 6.129

Вариант 2

1. Проведем $CE \perp AD$ (рис. 6.130). $DE^2 = CD^2 - CE^2 = 144$, $DE = 12$ см, тогда $BC = AE = 8$ см. $S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 126$ см^2.

Ответ: 126 см^2.

2. Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = 6$ см, $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 108$, $BE = 6\sqrt{3}$ см (рис. 6.131). $S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 24\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $24\sqrt{3}$ см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $BO = OD = BD : 2 = \sqrt{41}$ см (рис. 6.132). $AO = OC = AC : 2 = 13$ см. Если $KD = x$ см, то $AK = (16 - x)$ см. $OK^2 = OD^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2 = 41 - x^2 = 13^2 - (16 - x)^2$; $x = 4$. $KD = 4$ см, $AK = 12$ см.

Ответ: 4 см, 12 см.

2. $AB = BC = BK + KC = 25$ см (рис. 6.133). $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 49$, $AK = 7$ см. $AC^2 = AK^2 + KC^2 = 50$, $AC = 5\sqrt{2}$ см. $S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = 7 \cdot 25 : 2 = 87{,}5$ см^2.

Ответ: $AC = 5\sqrt{2}$ см, $S = 87{,}5$ см^2.

Вариант 2

1. $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$, тогда $\angle AO_1K = \angle BO_1K$, т. е. O_1K – биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного ΔAO_1B, следовательно, $O_1K \perp AB$ (рис. 6.134).

Пусть $O_1K = x$ см, $O_2K = (14 - x)$ см, тогда $AK^2 = AO_1^2 - KO_1^2 = AO_2^2 - KO_2^2$. $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$; $x = 5$.

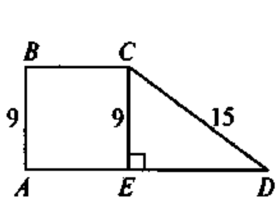


Рис. 6.130

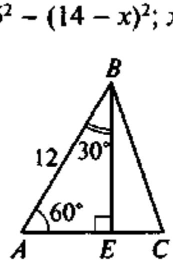


Рис. 6.131

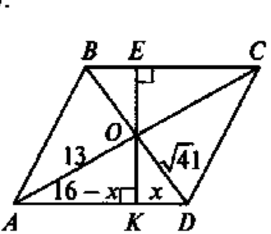


Рис. 6.132

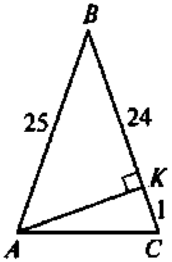


Рис. 6.133

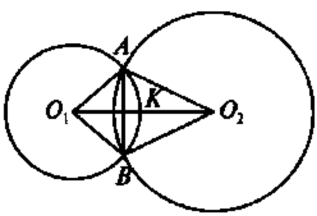


Рис. 6.134

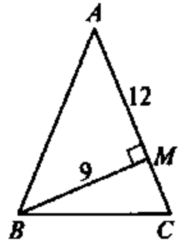


Рис. 6.135

Ответ: $O_1K = 5$ см, $KO_2 = 9$ см.

2. $AB^2 = BM^2 + AM^2 = 225$, $AB = 15$ см (рис. 6.135). $AC = AB = 15$ см, $CM = 3$ см. $BC^2 = BM^2 + MC^2 = 90$, $BC = 3\sqrt{10}$ см. $P_{ABC} = 15 + 15 + 3\sqrt{10} = 30 + 3\sqrt{10}$ см. $S_{ABC} = BM \cdot AC : 2 = 67{,}5$ см^2.

Ответ: $P = 30 + 3\sqrt{10}$см, $S = 67{,}5$ см^2.

Ответы и указания к дополнительным задачам:

Вариант 1

1. Пусть O — точка пересечения диагонали ромба. Тогда в ΔMBO $MB^2 = BO^2 + OM^2$, а в ΔABO $AB^2 = BO^2 + AO^2$. Значит, $MB^2 - AB^2 = OM^2 - AO^2 = (OM - AO)(OM + AO)$.

Так как $AO = OC$, $MC = OM - OC$, $OM + AO = AM$, тогда $MB^2 - AB^2 = MC \cdot AM$.

2. Из ΔABC $AC^2 = BC^2 + AB^2$. Из ΔBDC $BC^2 = BD^2 + DC^2$. Из ΔADB $AB^2 = BD^2 + AD^2$. Учитывая, что $AC = AD + DC$, получаем $(AD + DC)^2 = 2BD^2 + DC^2 + AD^2$, откуда $BD^2 = AD \cdot DC$.

Вариант 2

1. Из ΔACM $AM^2 = AC^2 + CM^2$ (1).

Из ΔBCH $BH^2 = BC^2 + HC^2$ (2).

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$AM^2 + BH^2 = AC^2 + BC^2 + CM^2 + HC^2$.

Из ΔABC $AC^2 + BC^2 = x^2$, из Δ MHC получаем $CM^2 + HC^2 = MH^2$.

Значит, $y^2 = x^2 + MH^2$, $MH = \sqrt{y^2 - x^2}$.

2. Используя формулы $S_{ABC} = AB \cdot BC : 2 = BD : 2$, получаем $AB \cdot BC = BD \cdot AC$, тогда $AB^2 \cdot BC^2 = BD^2 \cdot AC^2$.

Из ΔABC $BC^2 = AC^2 - AB^2$. Из ΔABD $BD^2 = AB^2 - AD^2$.

Значит, $AB^2 \cdot (AC^2 - AB^2) = (AB^2 - AD^2) \cdot AC^2$, или $AB^4 = AD^2 \cdot AC^2$, откуда $AB^2 = AD \cdot AC$.

III. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение дополнительной задачи.)

а) В прямоугольном ΔABH по теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 26^2 - 10^2 = 576$, т. е. $BH = 24$ см.

б) $\Delta ABD = \Delta DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD – общая сторона, $\angle BAD = \angle CDA$ как углы при основании равнобедренной трапеции), тогда $\angle BDA = \angle CAD$ и ΔAOD – равнобедренный и прямоугольный, тогда $\angle OAE = 45°$.

в) Проведем точку $KE \perp AD$ через точку O, тогда ΔAOE – прямоугольный, в нем $\angle OAE = 45°$, тогда $\angle AOE = 45°$ и $AE = OE$.

г) Таким же образом можно доказать, что $OK = BK$.

д) Так как $AE = OE$ и $OK = BK$, то $KE = AE + BK = BH = 24$ см.

е) OK и OE – высоты и медианы равнобедренных ΔBOC и ΔAOD, тогда $BK = KC$ и $AE = DE$, $BC + AD = 2KE = 48$ см.

ж) $S_{ABCD} = (AD + BC) : 2 \cdot BH = 48 \cdot 24 : 2 = 576$ см^2.

Ответ: 576 см^2.

IV. Решение задач

1. Решить задачу № 496.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 496

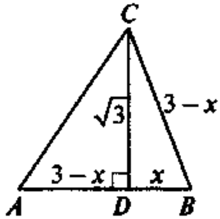


Рис. 6.136

Пусть $DB = x$ см (рис. 6.136), тогда $AD = AB - DB = (3 - x)$ см и $BC = (3 - x)$ см. В прямоугольном ΔCDB $CB^2 = DB^2 + CD^2$, т. е. $BD = 1$ см, $AD = 3 - x = 2$. В прямоугольном ΔACD $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 = 7$, т. е. $AC = \sqrt{7}$ см.

Ответ: $\sqrt{7}$ см.

Наводящие вопросы.

– Назовите теорему, с помощью которой мы сможем найти длину стороны AC.
– Известны ли длины катетов прямоугольного треугольника ADC?
– Обозначим длину отрезка DB за x. Чему равна длина отрезка AD?
– Каким соотношением связаны между собой стороны треугольника DBC?

2. Решить задачи (самостоятельно).

I уровень сложности: № 490 (б), 492, 495 (в).

II уровень сложности: № 495 (в), 522, 523.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.

Домашнее задание

Решить задачи № 490 (а), 494, 495 (б), 524 (устно).

Урок 29. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Основные дидактические цели урока: совершенствовать навыки решения задач по теме «Площадь»; ознакомить учащихся с формулой Герона и показать ее применение в процессе решения задач; подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 524 (доказательство формулы Герона).)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 6.137) и запись:

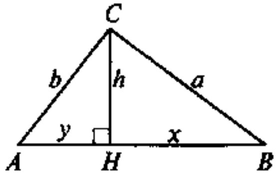


Рис. 6.137

План доказательства:

а) В ΔBCH $h^2 = a^2 - x^2$. В ΔACH $h^2 = b^2 - y^2$.

б) $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$; $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$; $(y - x)(y + x) = b^2 - a^2$.

$y + x = c$ (1), тогда $y - x = (b^2 - a^2) : c$ (2).

в) Из равенств (1) и (2) следует, что $2y = c + (b^2 - a^2) : c = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{c}$, $y = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$.

г) $h^2 = b^2 - y^2 = (b - y)(b + y) = \left(b - \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{c}\right)\cdot$

$$\left(b + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{c}\right) = \frac{a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right)}{2c} \cdot \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2c} =$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} =$$

$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c) \cdot (b + c - a)(b + c + a)}{4c^2} =$$

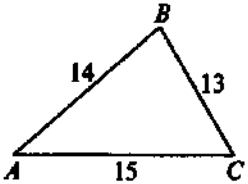


Рис. 6.138

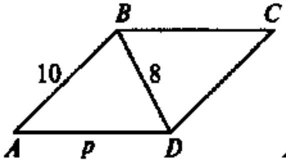


Рис. 6.139

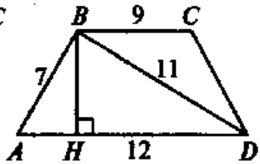


Рис. 6.140

$$=\frac{((a+b+c)-2b)((a+b+c)-2c)\cdot((a+b+c)-2a)\cdot(a+b+c)}{4c^2}=$$

$$=\frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)\cdot 2p}{4c^2}=\frac{16(p-a)(p-b)(p-c)\cdot p}{4c^2}=$$

$$=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2},\ h=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = P : 2 = (a + b + c) : 2$.

д) $S_\Delta = c \cdot h : 2 = c : 2 \cdot \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2. Решить задачи на закрепление формулы Герона (устно).

1) Рис. 6.138.

Найти: S_{ABC}.

2) Рис. 6.139.

Найти: S_{ABCD}.

3) Рис. 6.140.

Найти: S_{ABCD}.

III. Решение задач

1. Решить задачи № 504, 517 (работа в парах).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает помощь.)

Задача № 504

Решение: Проведем высоту параллелограмма CE. Так как $OK \perp AD$ и $CE \perp AD$, O — середина AC, то по теореме Фалеса $AK = KE = 33$ см, тогда $DE = KE - KD = 21$ см (рис. 6.141).

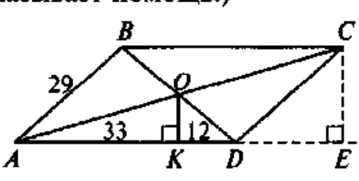


Рис. 6.141

В ΔDCE $\angle E = 90°$, $DC = 29$ см, $DE = 21$ см, тогда по теореме Пифагора $CE^2 = CD^2 - DE^2 = 841 - 441 = 400$, следовательно, $CE = 20$ см. $S_{ABCD} = AD \cdot CE = (33 + 12) \cdot 20 = 900$ см^2.

Ответ: 900 см^2.

Наводящие вопросы.

– Проведите высоту параллелограмма CE. Что можно сказать об отрезке KE? Чему он равен?

– Для чего мы нашли длину отрезка KE?

– Какая формула применяется для вычисления площади параллелограмма?

Задача № 517

I способ решения:

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. ΔABC и ΔACD – прямоугольные по теореме, обратной теореме Пифагора, так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$. Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{ab}{2}$, где a и b – катеты треугольника.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ см^2, $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ см^2, $S_{ABCD} = 30 + 54 = 84$ см^2.

Ответ: 84 см^2.

II способ решения:

По формуле Герона $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$; a, b, c – стороны треугольника.

$P_{ABC} = \frac{5+12+13}{2} = 15$ см, $P_{ACD} = \frac{9+12+15}{2} = 18$ см,

$S = \sqrt{15 \cdot (15-5) \cdot (15-12) \cdot (15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 30$ см^2.

$S = \sqrt{18 \cdot (18-9) \cdot (18-12) \cdot (18-15)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 54$ см^2.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 30 + 54 = 84$ см^2.

Ответ: 84 см^2.

Наводящие вопросы.

– Существует ли формула, позволяющая вычислить площадь произвольного четырехугольника?

– На какие две фигуры разбит этот четырехугольник отрезком AC?

– Что можно сказать об этих треугольниках? Как можно вычислить их площади?

– Существует ли другой способ вычисления площадей треугольников?

2. Решить задачи № 502, 514, 516, 525 (самостоятельно).

(В тетрадях учащиеся чертят рисунок и записывают краткое решение. Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 502

Краткое решение: $P = 42$ см $= (a + b) \cdot 2 \Rightarrow a + b = 21$, $b = 21 - a$ (a и b — стороны параллелограмма, h_1 и h_2 — его высоты).

$S = a \cdot h_1 = b \cdot h_2 \Rightarrow a \cdot 5 = (21 - a) \cdot 4 \Rightarrow a = 9\frac{1}{3}$ см; $S = 9\frac{1}{3} \cdot 5 = 46\frac{2}{3}$ см^2.

Ответ: $46\frac{2}{3}$ см^2.

Задача № 514

Краткое решение: Пусть $AC = 4{,}5$ дм $= 45$ см (рис. 6.142). $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \Rightarrow BD = \dfrac{540}{\frac{1}{2} \cdot 45} = 24$ см.

ΔBOC — прямоугольный, $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OK \Rightarrow OK = \dfrac{BO \cdot OC}{BC}$, $BO = \frac{1}{2} \cdot BD = 12$ см, $OC = \frac{1}{2} \cdot AC = 22{,}5$ см. По теореме Пифагора $BC^2 = BO^2 + OC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{12^2 + 22{,}5^2} = 25{,}5$ см $\Rightarrow OK = \dfrac{12 \cdot 22{,}5}{25{,}5} = 10\frac{10}{17}$ см.

Ответ: $10\frac{10}{17}$ см.

Задача № 516

Краткое решение: Проведем $BK \perp AC$. По теореме Фалеса, так как $BM = MC$, $BK \parallel MN$, то $KN = NC = 15$ см (рис. 6.143). По теореме Пифагора $BK^2 = BC^2 - KC^2 = 34^2 - 30^2 = 256 \Rightarrow BK = 16$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot (25 + 15) \cdot 16 = 320$ см^2.

Ответ: 320 см^2.

Задача № 525

Краткое решение: $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{ACM}$ (рис. 6.144).

$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$ см^2,

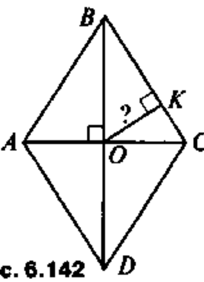


Рис. 6.142

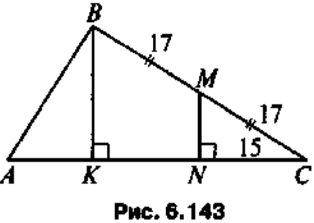


Рис. 6.143

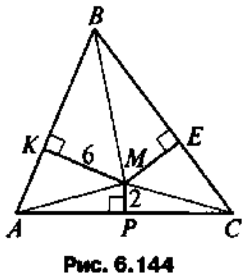


Рис. 6.144

$S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$ см^2.

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$,

где $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ см $\Rightarrow$

$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 15) \cdot (21 - 14)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84$ см^2 $\Rightarrow$

$S_{BCM} = 84 - 39 - 15 = 30$ см^2, $S_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot ME \Rightarrow$

$ME = \frac{2 \cdot S_{BCM}}{BC} = \frac{2 \cdot 30}{14} = 4\frac{2}{7}$ см.

Ответ: $4\frac{2}{7}$ см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

IV. Рефлексия учебной деятельности

Запишите на доске все известные нам формулы для вычисления площади:

а) треугольника;

б) прямоугольника;

в) параллелограмма;

г) ромба;

д) квадрата.

Домашнее задание

Решить задачи № 490 (в), 497, 503, 518.

Урок 30. Контрольная работа № 2 по теме «Площадь»

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Площадь».

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний по теме «Площадь» может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. Сторона треугольника равна 5 см, а высота, проведенная к ней, в два раза больше стороны. Найдите площадь треугольника.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите гипотенузу и площадь треугольника.

3. Найдите площадь и периметр ромба, если его диагонали равны 8 см и 10 см.

4*. В прямоугольной трапеции $ABCK$ большая боковая сторона равна $3\sqrt{2}$ см, угол K равен 45°, а высота CH делит основание AK пополам. Найдите площадь трапеции.

Вариант 2

1. Сторона треугольника равна 12 см, а высота, проведенная к ней, в три раза меньше высоты. Найдите площадь треугольника.

2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза 13 см. Найдите второй катет и площадь треугольника.

3. Диагонали ромба равны 10 см и 12 см. Найдите его площадь и периметр.

4*. В прямоугольной трапеции $ABCD$ большая боковая сторона равна 8 см, угол A равен 60°, а высота BH делит основание AD пополам. Найдите площадь трапеции.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Смежные стороны параллелограмма равны 52 см и 30 см, а острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD = 24$ см, $BC = 16$ см, $\angle A = 45°$, $\angle D = 90°$.

3. Дан треугольник ABC. На стороне AC отмечена точка C так, что $AK = 6$ см, $KC = 9$ см. Найдите площади треугольников ABK и CBK, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см.

4*. Высота равностороннего треугольника равна 6 см. Найдите сумму расстояний от произвольной точки, взятой внутри этого треугольника, до его сторон.

Вариант 2

1. Высота BK, проведенная к стороне AD параллелограмма $ABCD$, делит эту сторону на два отрезка $AK = 7$ см, $KD = 15$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 45°$.

2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $BC = 13$ см, $AD = 27$ см, $CD = 10$ см, $\angle D = 30°$.

3. Дан треугольник MKP. На стороне MK отмечена точка T так, что $MT = 5$ см, $KT = 10$ см. Найдите площади треугольников MPT и KPT, если $MP = 12$ см, $KP = 9$ см.

4*. В равностороннем треугольнике большая сторона составляет 75% суммы двух других. Точка M, принадлежащая этой стороне, является концом биссектрисы треугольника. Найдите расстояние от точки M до меньшей стороны треугольника, если меньшая высота треугольника равна 4 см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AE = 4$ см, $ED = 5$ см, $BE = 12$ см, $BD = 13$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CE, $CE = 12$ см, $BE = 9$ см, $AK = 10$ см. Найдите AC.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A = 30°$, высота $BK = 1$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь треугольника KMD, если M – середина отрезка BD.

4*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD, ACD, BCD равны. Докажите, что данный четырехугольник является параллелограммом.

Вариант 2

1. В трапеции $ABCD$ AD – большее основание, CK – высота, $AB = 5$ см. На отрезке AK взята точка E так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике ABC угол A тупой, BK и CD – высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите AD.

3. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, диагональ BD перпендикулярна к стороне AB. Прямая, проходящая через середину отрезка BD – точку M – параллельно AD, пересекает сторону AB в точке K, $MK = 4$ см. Найдите площадь треугольника AMD.

4*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD и ACD равны, а площади треугольников ACD и BCD не равны. Докажите, что данный четырехугольник является трапецией.

Итоговый тест № 2

Вариант 1

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Сторона ромба равна 5 см, а одна из его диагоналей 6 см. Площадь ромба равна:

1) 30 см^2; 3) 15 см^2;
2) 24 см^2; 4) 12 см^2.

А2. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает BC в точке E так, что $BE = 4{,}5$ см, $CE = 5{,}5$ см. Площадь прямоугольника равна:

1) 55 см^2; 3) 110 см^2;
2) 100 см^2; 4) 45 см^2.

А3. Площадь ромба со стороной 8 см и углом 60° равна:

1) 32 см^2; 3) 32 см^2;
2) $32\sqrt{3}$ см^2; 4) $16\sqrt{3}$ см^2.

А4. Площадь прямоугольника с гипотенузой 26 см, один из катетов которого равен 24 см, равна:

1) 120 см^2; 3) 312 см^2;
2) 120 см^2; 4) 240 см^2.

А5. Площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной в 13 см и основанием в 24 см равна:

1) 120 см^2; 3) 65 см^2;
2) 156 см^2; 4) 60 см^2.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle D = 45°$, основание BC равно 3 см, BF и CE – высоты трапеции, $ED = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

В2. В треугольнике ABC биссектриса AH равна 7 см, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Найдите $S_{\text{ABD}} : S_{\text{ACD}}$.

В3. В параллелограмме $MNKP$ диагональ MK равна 20 см. Точки B и C – середины сторон NK и KP соответственно. Отрезок BC пересекает диагональ MK в точке E. Найдите сумму ME и EK.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В ΔABC через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Найдите AC, если $KE = 12$ см. Найдите площадь треугольника BKE, если площадь треугольника $ABC = 72$ см^2.

С2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание равно меньшей боковой стороне. Диагональ, проведенная из вершины тупого угла, перпендикулярна большой боковой стороне, равной $8\sqrt{2}$ см. Найдите периметр и площадь трапеции.

Вариант 2

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Площадь квадрата со стороной $5\sqrt{2}$ см равна:

1) 50 см^2; 3) 75 см^2;
2) 25 см^2; 4) 100 см^2.

А2. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ пересекает AD в точке K так, что $AK = 6{,}5$ см, $KD = 3{,}5$ см. Площадь прямоугольника равна:

1) 35 см²; 3) 65 см²;
2) 100 см²; 4) 32,5 см².

А3. Площадь ромба со стороной 10 см и углом 60° равна:

1) 50 см²; 3) 100 см²;
2) $50\sqrt{3}$ см²; 4) $25\sqrt{3}$ см².

А4. Площадь равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 16 см и боковой стороной 5 см равна:

1) 104 см²; 3) 52 см²;
2) 52 см²; 4) 65 см².

А5. Одна из сторон параллелограмма равна 14 см, а высота, проведенная к ней, – 12 см. Высота, проведенная к смежной стороне, равной 21 см, равна:

1) 8 см; 3) 10 см;
2) 12 см; 4) 19 см.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle D = 45°$, основание BC равно 5 см, BF и CE – высоты трапеции, $ED = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

В2. В треугольнике ABC биссектриса AH равна 8 см, $AB = 6$ см, $AC = 9$ см. Найдите $S_{ABD} : S_{ACD}$.

В3. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 8 и 12 см, диагональ AC равна 40 см и пересекает диагональ BD в точке O. Найдите сумму AO и CO.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AB, один из углов параллелограмма равен 120°, $AD = 12$ см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите диагонали параллелограмма и площадь треугольника CDO.

С2. В равнобедренной трапеции $MNKP$ диагональ MK является биссектрисой угла при нижнем основании MP. Меньшее основание NK равно 8 см. Найдите площадь трапеции, если один из углов в два раза меньше другого. В каком отношении высота KE делит основание MP.

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Краткое решение задач контрольной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$. $a = 5$ см, $h_a = 5 \cdot 2 = 10$ см, $S = 5 : 2 \cdot 10 = 25$ см^2.

Ответ: 25 см^2.

2. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $c = 10$ см.

$S = \frac{ab}{2} = 6 \cdot 8 : 2 = 24$ см^2.

Ответ: 10 см, 24 см^2.

3. ΔAOB – прямоугольный (рис. 6.145).

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. $AB = \sqrt{41}$ см.

$P_{ABCD} = 4\sqrt{41}$ см. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 8 \cdot 10 : 2 = 40$ см^2.

Ответ: $P = 4\sqrt{41}$ см, $S = 40$ см^2.

4*. ΔKCH – прямоугольный, равнобедренный (рис. 6.146), тогда $KH = CH$.

По теореме Пифагора: $CK^2 = KH^2 + CH^2$, $(3\sqrt{2})^2 = KH^2 + KH^2$, $KH = 3$ см, $CH = 3$ см. Так как CH делит AK пополам, то $AH = 3$ см, $AK = 6$ см. $ABCH$ – прямоугольник, $BC = AH = 3$ см.

$S_{ABCK} = CH : 2 \cdot (BC + AK) = 3 : 2 \cdot (3 + 6) = 13{,}5$ см^2.

Ответ: $S_{ABCK} = 13{,}5$ см^2.

Вариант 2

1. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$. $a = 12$ см, $h_a = 12 : 3 = 4$ см, $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

2. По теореме Пифагора $a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $a = 5$ см.

$S = \frac{ab}{2} = 5 \cdot 12 : 2 = 30$ см^2.

Ответ: 5 см, 30 см^2.

3. ΔAOB – прямоугольный (рис. 6.147).

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 5^2 + 6^2 = 61$. $AB = \sqrt{61}$ см.

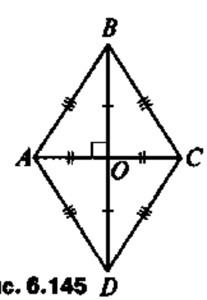


Рис. 6.145

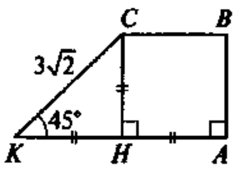


Рис. 6.146

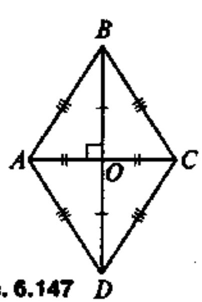


Рис. 6.147

$P_{ABCD} = 4\sqrt{61}$ см. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 10 \cdot 12 : 2 = 60$ см^2.

Ответ: $P = 4\sqrt{61}$ см, $S = 60$ см^2.

4*. ΔABH – прямоугольный (рис. 6.148), в нем $\angle A = 60°$, тогда $\angle ABH = 30°$, $AH = \frac{1}{2} \cdot AB = 4$ см.

По теореме Пифагора: $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 64 - 16 = 48$, $BH = 4\sqrt{3}$ см. Так как BH делит AD пополам, то $DH = 4$ см, $AD = 8$ см. $HBCD$ – прямоугольник, $BC = HD = 4$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot (4 + 8) = 24\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 24\sqrt{3}$ см^2.

II уровень сложности

Вариант 1

1. ΔABH – прямоугольный (рис. 6.149), в нем $\angle A = 30°$, $BH = \frac{1}{2} \cdot AB = 15$ см. $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 52 \cdot 15 = 780$ см^2.

Ответ: 780 см^2.

2. Проведем высоту BK, тогда $KBCD$ – прямоугольник (рис. 6.150), $KD = BC = 16$ см, $AK = AD - KD = 24 - 16 = 8$ см.

ΔABK – прямоугольный, равнобедренный ($\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$, $\angle ABK = 90° - \angle A = 45°$), тогда $AK = BK = 8$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (16 + 24) = 160 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 160$ см^2.

3. ΔABK и ΔCBK имеют одну и ту же высоту (рис. 6.151), значит, $S_{ABK} : S_{CBK} = AK : CK = 6 : 9$.

$S_{ABK} + S_{CBK} = S_{ABC}$, значит, $S_{ABK} = \frac{6}{15} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot S_{ABC}$, $S_{CBK} = \frac{9}{15} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{5}S_{ABC}$.

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона, где a, b, c – стороны ΔABC, p – его полупериметр.

$$p = \frac{1}{2} \cdot (13 + 14 + 15) = 21 \text{ см}.$$

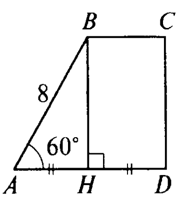


Рис. 6.148

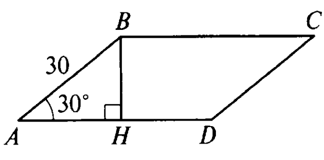


Рис. 6.149

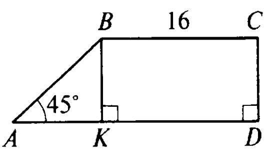


Рис. 6.150

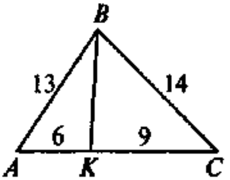


Рис. 6.151

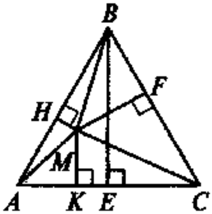


Рис. 6.152

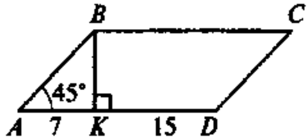


Рис. 6.153

$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} =$
$= 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 84$ см^2.
$S_{ABK} = 84 \cdot 2 : 5 = 33{,}6$ см^2. $S_{CBK} = 84 \cdot 3 : 5 = 50{,}4$ см^2.
Ответ: $S_{ABK} = 33{,}6$ см^2, $S_{CBK} = 50{,}4$ см^2.

4*. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE$ (1) (рис. 6.152).

Так как ΔABC – равносторонний, то $AB = AC$, тогда $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot HM + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MK + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (HM + MK + MF)$ (2).

Из равенств (1) и (2) следует, что $HM + MK + MF = BE = 6$ см.
Ответ: 6 см.

Вариант 2

1. ΔABK – прямоугольный (рис. 6.153), в нем $\angle A = 45°$, тогда $\angle ABK = 90° - 45° = 45°$, значит, ΔABK – равнобедренный, $AK = BK = 7$ см.

$S_{ABCD} = AD \cdot BK = (AK + KD) \cdot BK = (7 + 15) \cdot 7 = 154$ см^2.
Ответ: 154 см^2.

2. Проведем высоту CK, тогда ΔCDK – прямоугольный, в нем $\angle D = 30°$, $CK = \frac{1}{2} \cdot CD = 5$ см (рис. 6.154).

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (27 + 13) = 100$ см^2.
Ответ: $S_{ABCD} = 100$ см^2.

3. ΔKPT и ΔMPT имеют одну и ту же высоту (рис. 6.155), значит, $S_{KPT} : S_{MPT} = KT : MT = 10 : 5 = 2 : 1$.

$S_{KPT} + S_{MPT} = S_{MPK}$, тогда $S_{KPT} = \frac{2}{3} \cdot S_{MPK}$, $S_{MPT} = \frac{1}{3} \cdot S_{MPK}$.

$S_{MPK} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона, где a, b, c – стороны ΔMPK, p – его полупериметр.

$p = \frac{1}{2} \cdot (9 + 12 + 15) = 18$ см.

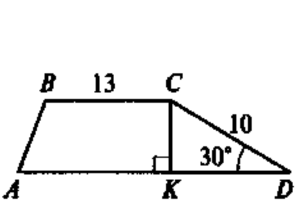


Рис. 6.154

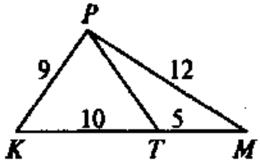


Рис. 6.155

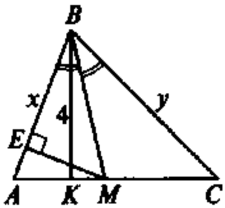


Рис. 6.156

$S_{MPK} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = \sqrt{2\cdot9\cdot9\cdot2\cdot3\cdot3} =$
$= 9\cdot2\cdot3 = 54$ см^2.

$S_{KPT} = \frac{2}{3}\cdot S_{MPK} = 36$ см^2. $S_{MPT} = \frac{1}{3}\cdot S_{MPK} = 18$ см^2.

Ответ: $S_{KPT} = 36$ см^2, $S_{MPT} = 18$ см^2.

4*. Пусть $x = AB$ – меньшая сторона треугольника (рис. 6.156), $y = BC$ – вторая сторона, тогда $0{,}75(x+y) = AC$ – большая сторона. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы, т. е. так как $\angle ABM = \angle CBM$, то $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{AB\cdot BM}{CB\cdot BM} = \frac{AB}{CB} = \frac{x}{y}$, тогда $S_{ABM} = \frac{x}{y}S_{CBM}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BK = \frac{1}{2}\cdot 0{,}75\cdot(x+y)\cdot 4 = 1{,}5\cdot(x+y)$.

С другой стороны, $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{CBM} = \frac{x}{y}\cdot S_{CBM} = S_{CBM} \times$ $\times (x : y + 1)$, тогда $1{,}5\cdot(x+y) = S_{CBM}\cdot(x : y + 1)$, откуда $S_{CBM} =$ $= 1{,}5(x+y) : (x : y + 1) = 1{,}5y$, значит, $S_{ABM} = \frac{x}{y}\cdot 1{,}5y = 1{,}5x$. Но $S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot ME$, а $ME = 2S_{ABM} : AB = 2\cdot 1{,}5x : x = 3$ см.

Ответ: 3 см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В ΔDBE $DB^2 = BE^2 + DE^2$ $(13^2 = 12^2 + 5^2)$ (рис. 6.157), по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔDBE – прямоугольный, $BE \perp DE$, т. е. BE – высота параллелограмма.

$S_{ABCD} = AD\cdot BE = (AE + ED)\cdot BE = (4+5)\cdot 12 = 108$ см^2.
Ответ: 108 см^2.

2. ΔBCE – прямоугольный (рис. 6.158), по теореме Пифагора $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, $BC = 15$ см.

$S_{ABC} = AK\cdot BC : 2 = CE\cdot AB : 2$.

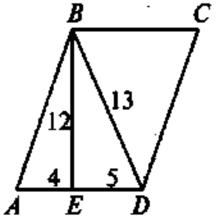


Рис. 6.157

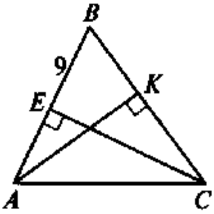


Рис. 6.158

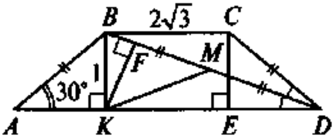


Рис. 6.159

$10 \cdot 15 : 2 = 12 : 2 \cdot AB$, откуда $AB = 12{,}5$ см, значит, $AE = AB - BE = 12{,}5 - 9 = 3{,}5$ см.

ΔACE – прямоугольный, по теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2 = 3{,}5^2 + 12^2 = 156{,}25$, откуда $AC = 12{,}5$ см.

Ответ: $AC = 12{,}5$ см.

3. ΔABK – прямоугольный, в нем $\angle A = 30°$, $BK = 1$ см, тогда $AB = 2$ см (рис. 6.159).

По теореме Пифагора: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 4 - 1 = 3$, $AK = \sqrt{3}$ см. Проведем высоту CE, тогда прямоугольные треугольники ABK и DCE равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, так как $ABCD$ – равнобедренная трапеция), тогда $DE = AK = \sqrt{3}$ см.

$KBCE$ – прямоугольник, поэтому $KE = BC = 2\sqrt{3}$ см, тогда $KD = KE + DE = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ см.

ΔBKD – прямоугольный, отсюда $S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2.

$S_{BKM} = S_{KDM}$, так как $S_{BKM} = \frac{1}{2} \cdot KF \cdot BM$, $S_{KDM} = \frac{1}{2} \cdot KF \cdot MD$, а $BM = MD$ по условию задачи, значит, $S_{KDM} = \frac{1}{2} \cdot S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ см^2.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см^2.

4*. Рис. 6.160.

а) $S_{ABD} = S_{ACD}$ по условию задачи.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AD$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AD$, тогда $BK = CE$.

Так как $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$.

В четырехугольнике $KBCE$ стороны BK и CE параллельны и равны, значит, $KBCE$ – параллелограмм, следовательно, $BC \parallel KE$, т. е. $BC \parallel AD$.

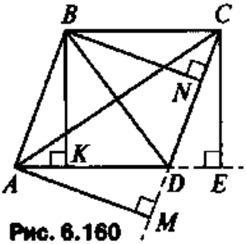


Рис. 6.160

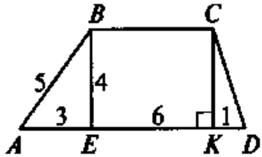


Рис. 6.161

б) $S_{ACD} = S_{BCD}$ по условию задачи.

Так как $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BN$, то $AM = BN$.

Так как $AM \perp CD$ и $BN \perp CD$, то $AM \parallel BN$.

В четырехугольнике $MABN$ стороны AM и BN параллельны и равны, значит, $MABN$ – параллелограмм, следовательно, $AB \parallel MN$, т. е. $AB \parallel CD$.

в) Так как $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

Вариант 2

1. В ΔABE (рис. 6.161) $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ($5^2 = 3^2 + 4^2$), по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔABE – прямоугольный, $BE \perp AE$, т. е. BE – высота трапеции. Так как BE и CK – высоты трапеции, то $EBCK$ – четырехугольник и $BC = EK = 6$ см.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (6 + 10) = 32$ см^2.

Ответ: 32 см^2.

2. ΔABK – прямоугольный (рис. 6.162), по теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, $AB = 15$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ см^2.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}AC \cdot 12 = 75$, откуда $AC = 12{,}5$ см.

ΔACD – прямоугольный, $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 12{,}5^2 - 10^2 = 56{,}25$, откуда $AD = 7{,}5$ см.

Ответ: 7,5 см.

3. Проведем $ME \parallel AB$ (рис. 6.163), тогда по теореме Фалеса, так как $AB \parallel ME$ и $BM = MD$, то $AE = DE$.

$AKME$ – параллелограмм ($KM \parallel AE$, $AK \parallel ME$), тогда $AE = KM = 4$ см, значит, $DE = 4$ см, $AD = 8$ см.

ΔABD – прямоугольный, в нем $\angle BDA = 90° - \angle A = 30°$, $AD = 8$ см, тогда $AB = 4$ см.

По теореме Пифагора $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 64 - 16 = 48$, $BD = 4\sqrt{3}$ см, $S_{ABD} = AB \cdot BD : 2 = 4 \cdot 4\sqrt{3} : 2 = 8\sqrt{3}$ см^2.

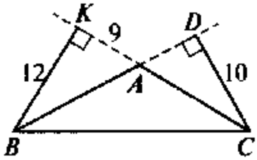


Рис. 6.162

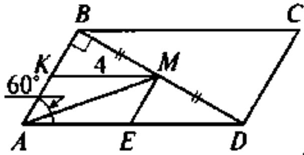


Рис. 6.163

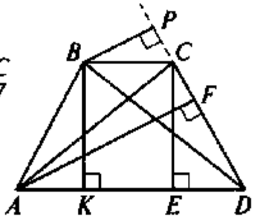


Рис. 6.164

В ΔABM и ΔAMD одна и та же высота AB, $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM$, $S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MD$.

Так как $BM = MD$ по условию задачи, то $S_{ABM} = S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $S_{AMD} = 4\sqrt{3}$ см^2.

4*. Рис. 6.164.

а) $S_{ABD} = S_{ACD}$ по условию задачи.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CE$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CE$, тогда $BK = CE$.

Так как $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$.

В четырехугольнике $KBCE$ стороны BK и CE параллельны и равны, значит, $KBCE$ – параллелограмм, тогда $BC \parallel KE$, т. е. $BC \parallel AD$.

б) $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AF$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BP$, тогда $AF \neq BP$.

В четырехугольнике $FABP$ стороны AF и BP параллельны ($AF \perp CD$, $BP \perp CD$), но не равны, поэтому $FABP$ не является параллелограммом, а это значит, что AB не параллельна PF, т. е. AB не параллельна CD.

в) Так как $BC \parallel AD$, а AB не параллельна CD, т. е. в четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны, то $ABCD$ – трапеция.

Ответы итогового теста № 2

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2
1	2	4	2	1	3	$S_{ABCD} = 4 \cdot \left(5 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$S_{ABD} : S_{ACD} = 3 : 4$
2	1	3	2	2	1	$S_{ABCD} = 4 \cdot \left(7 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$S_{ABD} : S_{ACD} = 2 : 3$

Вариант	В3	С1	С2
1	20 см	$AC = 18$ см, $S_{BKE} = 32$ см^2	$S_{ABCD} = 4 \cdot \left(5 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $P_{ABCD} = 8 \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right)$ см, $S = 96$ см^2
2	40 см	$AC = 6\sqrt{7}$ см, $BD = 6\sqrt{3}$ см, $S_{CDO} = 18\sqrt{3}$ см^2	$S_{MNKP} = 48\sqrt{3}$ см^2, $ME : EP = 3 : 1$

Критерии оценивания результатов контрольной работы:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

За правильно решенную дополнительную задачу (№ 4) ставится дополнительная оценка.

Критерии оценивания результатов итогового теста:

- оценка «5» – учащийся набрал 14–19 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 9–13 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–8 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

За каждое правильно выполненное задание части А ставится 1 балл, части В – 2 балла, части С – 4 балла.

Глава VII
ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Формируемые УУД: *предметные:* иметь понятие о пропорциональных отрезках и подобных треугольниках, среднем пропорциональном (среднем геометрическом) двух отрезков; знать свойство биссектрисы, медиан треугольника, теорему об отношении площадей подобных треугольников, признаки подобия треугольников, теорему о средней линии треугольника; решать задачу о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике: свойства высоты прямоугольного треугольника, проведенного из вершины прямого угла; иметь понятие о синусе, косинусе и тангенсе острого угла прямоугольного треугольника; уметь вычислять значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°; знать основное тригонометрическое тождество и применять в процессе решения задач; уметь доказывать теоремы; применять теории подобных треугольников в процессе решения задач, в измерительных задачах на местности; иметь навыки решения задач о прямоугольных треугольниках, используя синус, косинус и тангенс острого угла; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал, уметь извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; уметь доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

Урок 31. Определение подобных треугольников

Основные дидактические цели урока: ввести понятие пропорциональных отрезков и подобных треугольников; рассмотреть свойство биссектрисы треугольника и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе.

1) Провести общий анализ контрольной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

2. Подготовка учащихся к восприятию нового материала (фронтальная работа).

1) Что называют отношением двух чисел? Что показывает отношение?

2) $AB : CD = 2 : 7$. О чем это говорит? Найдите отношение CD к AB.

3) В ΔABC $AB : BC : AC = 2 : 4 : 3$, $P_{\text{ABC}} = 45$ дм. Найдите стороны треугольника ABC.

4) Что называют пропорцией? Верны ли пропорции $1{,}5 : 1{,}8 = 25 : 30$; $18 : 3 = 5 : 30$?

5) В пропорции $a : b = c : d$ укажите крайние и средние члены. Сформулируйте основное свойство пропорции.

6) Переставив средние или крайние члены пропорции, составьте три верные пропорции:

а) $12 : 0{,}2 = 30 : 0{,}5$;

б) $AB : MN = CD : KP$.

7) Найдите неизвестный член пропорции.

а) $7x : 4{,}2 = 12{,}3 : 6$;

б) $x : AB = MN : KP$ (*найти поочередно AB, MN, KP*).

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие отношения отрезков.

Определение: Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $AB : CD$.

2. Ввести понятие пропорциональных отрезков.

Определение: Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Например:

Если $AB = 5$ см, $CD = 7$ см, $A_1B_1 = 7{,}5$ см, $C_1D_1 = 10{,}5$ см, то $AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1$, т. е. отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Отрезки AB, CD, MN пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1N_1. Найдите C_1D_1 и MN, если $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 20$ см, $CD = 6$ см, $M_1N_1 = 8$ см.

3. Ввести понятие подобных фигур (два круга, два квадрата, два мяча разных размеров, одна и та же фотография на фотоаппарате и на экране компьютера и т. д.).

4. Ввести понятие подобных треугольников.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, где k – коэффициент подобия.

Стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 называют *сходственными*.

Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (работа в парах).

Решить задачи № 51, 52.

(Учитель читает условие задачи № 51, ученики заполняют пропуски в тетради. Одна пара отвечает на вопрос, затем идет обсуждение. Так же решить задачу № 52.)

2. Решить задачу № 535.

(Ученики самостоятельно читают задачу и ее решение. Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Вопросы, контролирующие глубину усвоения доказательства.

– Почему $\frac{S_{\mathrm{ABD}}}{S_{\mathrm{ACD}}} = \frac{BD}{CD}$?

– Сформулируйте теорему, на основании которой, если $\angle 1 = \angle 2$, то $\frac{S_{\mathrm{ABD}}}{S_{\mathrm{ACD}}} = \frac{AB}{AC}$.

— Поясните, на каком основании из равенства $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ следует равенство $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

3. Решить на доске и в тетрадях задачи № 536 (б), 541.

(Два ученика работают у доски, остальные — в тетрадях.)

Задача № 536 (б)

Решение: Так как $\angle C = \angle BDC$ (рис. 7.1), то ΔBDC — равнобедренный с основанием CD, следовательно, $BC = BD = 16$.

Так как BD — биссектриса ΔABC, то $\frac{DC}{BC} = \frac{DA}{AB}$, следовательно, $DC = \frac{BC \cdot DA}{AB} = \frac{16 \cdot 20}{30} = 10\frac{2}{3}$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

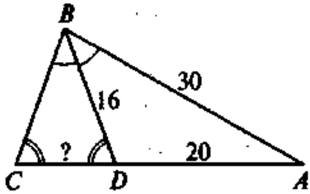


Рис. 7.1

Наводящие вопросы.

– Как биссектриса треугольника делит противолежащую сторону?
– Длину какого отрезка необходимо найти для нахождения отрезка CD?
– Как можно вычислить длину отрезка BC?

Задача № 541

Решение: В ΔABC $\angle A = 106°$, $\angle B = 34°$, следовательно, $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 140° = 40°$.

В ΔDEF $\angle E = 106°$, $\angle F = 40°$, следовательно, $\angle D = 180° - (\angle E + \angle F) = 180° - 146° = 34°$.

По определению подобных треугольников два треугольника называют правильными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

В ΔABC и ΔDEF $\angle A = \angle E = 106°$; $\angle B = \angle D = 34°$; $\angle C = \angle F = 40°$; $BC : DF = 7{,}6 : 22{,}8 = 1 : 3$; $AC : EF = 4{,}4 : 13{,}2 = 1 : 3$; $AB : DE = 5{,}2 : 15{,}6 = 1 : 3 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ответ: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Наводящие вопросы.

– Когда два треугольника подобны?
– Равны ли углы этих треугольников?
– Пропорциональны ли сходственные стороны данных треугольников?
– Подобны ли ΔABC и ΔEDF?

4. Решить задачи № 534 (в), 537 (самостоятельно).

Задача № 534 (в)

Краткое решение: $AB : MM_1 = 9 : 1$; $BD : M_1M_2 = 9 : 2 = 4{,}5$; $9 \neq 4{,}5 \Rightarrow$ отрезки AB и BD не пропорциональны отрезкам MM_1 и M_1M_2.

Задача № 537

Краткое решение: AD – биссектриса $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow$ $CD = \dfrac{AC \cdot BD}{AB} = \dfrac{3}{2} \cdot BD$.

$CD + DB = BC \Rightarrow CD + BD = \dfrac{3}{2} \cdot BD + BD = 20 \Rightarrow BD =$ $= 8$ см $\Rightarrow DC = 20 - 8 = 12$ см.

Ответ: $BD = 8$ см, $DC = 12$ см.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Что вы понимаете под «отношением отрезков»?
2. Что значит «отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1»?
3. Приведите примеры подобных фигур.
4. Какие треугольники называются подобными?

Домашнее задание

1. П. 58, 59, вопросы 1, 2, 3 (учебник, с. 158).
2. Решить задачи № 534 (а, б), 535 (устно), 536 (а), 538, 542.
3. Решить задачу № 53 (рабочая тетрадь).

Урок 32. Отношение площадей подобных треугольников

Основные дидактические цели урока: закрепить понятия пропорциональных отрезков и подобных треугольников; совершенствовать навыки решения задач на применение свойства биссектрисы треугольника и определения подобных треугольников; рассмотреть теорему об отношении площадей подобных треугольников и показать ее применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся. Мотивация к учебной деятельности

1. Теоретический опрос.

(Один ученик оформляет доказательство теоремы на доске.)

1) Ответить на вопросы 1–3 учебника.

2) Доказать свойство биссектрисы треугольника.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 538, 542. Два ученика готовят решение на доске.)

Задача № 538

Решение: AD – биссектриса ΔABC, следовательно, $\frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB}$, отсюда $AB = \frac{AC \cdot BD}{CD} = \frac{AC \cdot 13{,}5}{4{,}5} = 3AC$ (рис. 7.2).

$P_{ABC} = AB + AC + BC = 3AC + AC + (CD + DB) = 4AC + 18 = 42$, следовательно, $AC = \frac{42 - 18}{4} = 6$ см, отсюда $AB = 3 \cdot 6 = 18$ см.

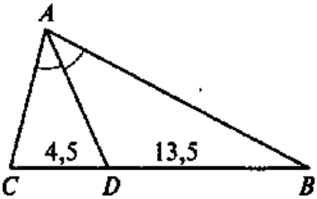


Рис. 7.2

Ответ: $AC = 6$ см, $AB = 18$ см.

Наводящие вопросы.

– В каком отношении биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC?

– Что можно сказать об отношении отрезков AB и AC?

– Составьте уравнение, используя отношение отрезков AB и AC и значение периметра треугольника ABC.

Задача № 542

Решение: $\Delta ABC \sim \Delta KMN$, следовательно, $\frac{KM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{KN}{AC}$.

$\frac{KM}{AB} = 2{,}1$, отсюда $KM = 2{,}1 \cdot AB = 2{,}1 \cdot 4 = 8{,}4$ см.

$\frac{MN}{BC} = 2{,}1$, отсюда $MN = 2{,}1 \cdot BC = 2{,}1 \cdot 5 = 10{,}5$ см.

$\frac{KN}{AC} = 2{,}1$, отсюда $KN = 2{,}1 \cdot AC = 2{,}1 \cdot 7 = 14{,}7$ см.

Ответ: $KM = 8{,}4$ см, $MN = 10{,}5$ см, $KN = 14{,}7$ см.

Наводящие вопросы.

– Какие треугольники называются подобными?

– Чему равно отношение сходственных сторон MN и BC, KN и AC?

– Чему равны стороны треугольника KMN?

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам.)

I уровень сложности

1. Треугольники KPF и EMT подобны, причем $KP : ME = PF : MT = KF : ET$, $\angle F = 30°$, $\angle E = 49°$. Найдите остальные углы этих треугольников.

2. Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки AD и CD, равные соответственно 7 см и 10,5 см. Найдите периметр треугольника ABC, если известно, что $AB = 9$ см.

II уровень сложности

1. ΔBDC подобен ΔABC (рис. 7.3), $AD = 16$ см, $DC = 9$ см. $\angle ABC$ и $\angle BDA$ – тупые. Найдите BC.

2. Периметр треугольника равен 70 см, две его стороны равны 24 см и 32 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

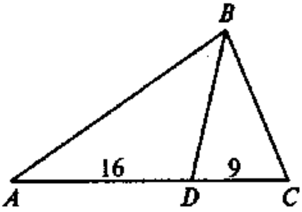


Рис. 7.3

III уровень сложности

1. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD, $BC = 8$ см, $AD = 18$ см. Найдите AC.

2. В равнобедренном треугольнике точка E – середина основания AC, а точка K делит сторону BC в отношении $2 : 5$, считая от вершины C. Найдите отношение, в котором прямая BE делит отрезок AK.

3. Решение задач по готовым чертежам для подготовки к восприятию нового материала (работа в парах).

1) *Дано:* $S_{ABD} = 12$ см^2 (рис. 7.4).
Найти: S_{ACD}.

2) *Дано:* $S_{ABC} : S_{MNK} = 3 : 7$ (рис. 7.5).
Найти: MN.

3) *Дано:* $S_{BMN} = 4$ см^2 (рис. 7.6).
Найти: S_{ABC}.

4) *Дано:* $BK : KD = 1 : 3$, $CO : OD = 2 : 3$ (рис. 7.7). $S_{AOC} = 4$ см^2.
Найти: S_{BOK}.

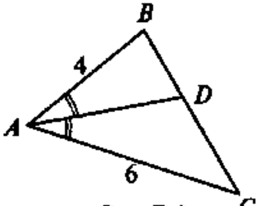


Рис. 7.4

Ответы и указания к задачам по готовым чертежам:

1) $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{12}{S_{ACD}} \Rightarrow S_{ACD} = 18$ см^2.

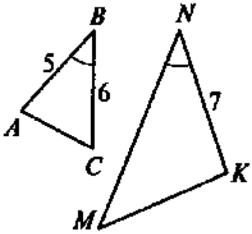


Рис. 7.5

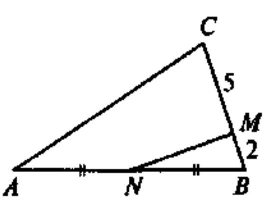


Рис. 7.6

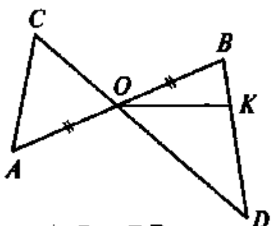


Рис. 7.7

2) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \dfrac{AB \cdot BC}{MN \cdot NK} \Rightarrow \dfrac{3}{7} = \dfrac{5 \cdot 6}{MN \cdot 7} \Rightarrow MN = 15$ см.

3) $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{BM \cdot BN}{BC \cdot BA} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot BN}{7 \cdot 2BN} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow S_{ABC} = 28$ см^2.

4) $\dfrac{S_{AOC}}{S_{OBD}} = \dfrac{OC \cdot OA}{OB \cdot OD} \Rightarrow \dfrac{4}{S_{OBD}} = \dfrac{OC}{OD} \cdot \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow S_{OBD} =$ $= 6$ см^2.

$\dfrac{S_{OBK}}{S_{OBD}} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow S_{OBK} = 1{,}5$ см^2.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

III. Работа по теме урока

(Учитель делит класс на группы для решения задания творческого характера. После завершения работы заслушиваются и обсуждаются варианты решений.)

Задание. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия k. Найти отношение их площадей.

Возможный вариант решения:

Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, тогда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1C_1} \cdot \dfrac{AC}{A_1C_1} =$ $= k \cdot k = k^2$.

Вывод. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 54.

(Учащиеся самостоятельно решают задачу, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачу № 545 (работа в парах).

(После завершения работы заслушиваются и обсуждаются варианты решений.)

Задача № 545

Краткое решение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $k = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1}} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{36}{25}$.

S_{ABC} на 77 см^2 больше $S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} \Rightarrow$

$S_{\text{ABC}} = S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} + 77 \Rightarrow \frac{S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} + 77}{S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1}} = \frac{36}{25} \Rightarrow$

$25 \cdot (S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} + 77) = 36 \cdot S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1}$, $S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} \cdot (36 - 25) = 25 \cdot 77$.

$S_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1} = \frac{25 \cdot 77}{11} = 25 \cdot 7 = 175$ см$^2 \Rightarrow S_{\text{ABC}} = 77 + 175 = 252$ см^2.

Ответ: 175 см^2 и 252 см^2.

Вопросы для обсуждения.

– Чему равно отношение площадей подобных треугольников, если их сходственные стороны относятся как 6 : 5?

– Верно ли составлено уравнение исходя из условий задачи?

3. Решить задачи № 547, 548 (работа в группах).

(После завершения работы заслушиваются и обсуждаются варианты решений.)

Задача № 547

Краткое решение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \Rightarrow$

$AB = k \cdot A_1B_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$, $AC = k \cdot A_1C_1 \Rightarrow$

$$\frac{P_{\text{ABC}}}{P_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$$

$$= \frac{k\left(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1\right)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k.$$

Задача № 548

Краткое решение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140\text{ см}}{56\text{ см}} = 2{,}5 = k \Rightarrow \frac{P_{\text{ABC}}}{P_{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1}} = k = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

V. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 – сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $BC : B_1C_1 = 2{,}5$, $A_1C_1 = 4$ см, $\angle B = 47°21'$. Найдите $\angle B_1$, AC и отношение площадей этих треугольников.

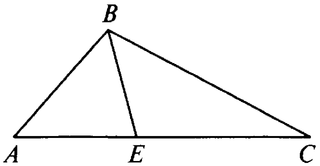


Рис. 7.8

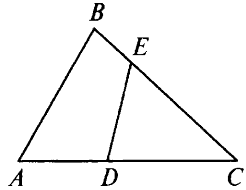


Рис. 7.9

2. Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 2 см. Найдите сходственную ей сторону другого треугольника.

3*. *Дано:* $\Delta BEC \sim \Delta ABC$, $AC = 16$ см, $CE = 9$ см, $\angle BEC$ – тупой (рис. 7.8).

Найти: BC.

Вариант 2

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 – сходственные стороны. Найдите $\angle C_1$, AB и отношение площадей этих треугольников, если $AC : A_1C_1 = 4{,}4$, $A_1B_1 = 5$ см, $\angle C = 15°31'$.

2. Две сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см. Площадь первого треугольника 8 см^2. Найдите площадь второго треугольника.

3*. *Дано:* $\Delta ABC \sim \Delta DEC$, DE не параллелен AB, $AD = 3$ см, $DC = 5$ см, $BC = 7$ см (рис. 7.9).

Найти: CE.

II уровень сложности

Вариант 1

1. MH и CP, MK и CT – сходственные стороны подобных треугольников MHK и CPT. Найдите TP, угол H и отношение площадей треугольников CPT и MHK, если $MH : CP = 1 : 3$, $HK = 11$ см, $\angle P = 31°$.

2. Периметр подобных треугольников относится как $2 : 3$, сумма их площадей равна 260 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

3*. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD, $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что их сумма равна 10 см.

Вариант 2

1. Треугольники KEP и COT подобны, KE и CO, KP и CT – их сходственные стороны, $KE : CO = 1 : 5$, $EP = 2{,}2$ см, $\angle T = 42°$. Найдите угол P, OT и отношение площадей треугольников KEP и COT.

2. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дм. Найдите периметр каждого треугольника.

3*. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) AC – биссектриса угла A делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Найдите периметр трапеции.

III уровень сложности

Вариант 1

1. AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 – сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите B_1C_1, $\angle A$ и отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $BC : A_1C_1 = 5 : 2$, $AC = 7$ дм, $\angle B_1 = 17°$.

2. Прямая DE, параллельная стороне AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, стороны которого в три раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь трапеции $ADEC$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2.

3*. Отрезок BK (K принадлежит стороне AC) разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABK и KBC, причем $S_{ABK} : S_{BKC} = 1 : 3$. Найдите углы треугольника.

Вариант 2

1. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ AB и C_1A_1, BC и A_1B_1 – сходственные стороны. $BC : A_1B_1 = 3 : 4$, $AC = 6$ см, $\angle A_1 = 15°$. Найдите B_1C_1, $\angle B$ и отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

2. Прямая DE, параллельная стороне AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, стороны которого в четыре раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь ΔABC, если площадь трапеции $ADEC$ равна 30 см^2.

3*. Отрезок FP разбивает треугольник EFM на два подобных треугольника EFP и PFM, причем $\angle PFM = 60°$. Площадь треугольника PFM равна 30 см^2. Найдите площадь ΔEFM.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.
3. Что можно сказать о площадях подобных треугольников?

Домашнее задание

1. П. 60, вопросы 4 (учебник, с. 158).
2. Решить задачи № 543, 544, 546, 549.
3. Решить дополнительные задачи.

I уровень сложности: В подобных треугольниках ABC и KMN равны углы B и M, C и N, $AC = 3$ см, $KN = 6$ см, $MN = 4$ см,

$\angle A_1 = 30°$. Найдите BC, $\angle K$; отношение площадей треугольников ABC и KMN; AE и BE, если известно, что CE – биссектриса треугольника ABC, $AB = 3{,}5$ см.

II уровень сложности: В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 12$ см, CD – высота. Докажите, что ΔACD подобен ΔABC, найдите отношение их площадей и отрезки, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

Урок 33. Первый признак подобия треугольников

Основные дидактические цели урока: закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Определение подобных треугольников, отношение их площадей» в процессе решения задач; рассмотреть первый признак подобия треугольников и сформировать у учащихся навыки применения этого признака при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика оформляют доказательство теорем на доске. Заслушать после проверки домашнего задания.)

1) Доказать теорему об отношении площадей подобных треугольников (ответ заслушать после проверки домашних задач).

2) Сформулировать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 543, 549. Два ученика заранее готовят решение на доске. Дополнительные задачи учитель проверяет индивидуально во время решения задач по готовым чертежам.)

3. Решение задач для подготовки учащихся к восприятию нового материала (работа в парах).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

1) *Дано:* $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $CB_4 = 12$ см, $S_{A4B4C} = 32$ см^2 (рис. 7.10).

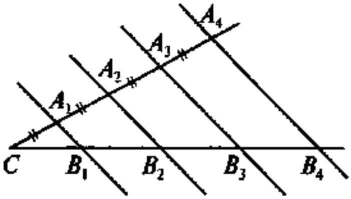


Рис. 7.10

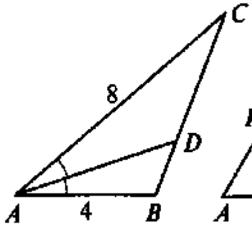


Рис. 7.11

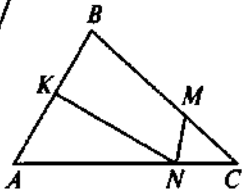


Рис. 7.12

Найти: а) B_1B_2, B_2B_4; б) S_{A3B3C}.

2) *Дано:* ΔABC, AD – биссектриса, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см (рис. 7.11).

Найти: а) BD, CD; б) $S_{ABC} : S_{ABD}$.

3) *Дано:* $S_{ABC} = 36$ см^2, $AN : NC = 3 : 1$, $BM : MC = 2 : 1$, $AK = KB$ (рис. 7.12).

Найти: а) S_{CMN}; б) S_{AKN}; в) S_{BKNM}.

Краткое решение задач:

1) По теореме Фалеса $CB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = 3$ см $\Rightarrow$ $B_2B_4 = 6$ см.

Треугольник A_3B_3C подобен треугольнику A_4B_4C,

$$k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{A_3B_3C}}{S_{A_4B_4C}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{A_3B_3C} = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ: $B_1B_2 = 3$ см, $B_2B_4 = 6$ см, $S_{A_3B_3C} = 18$ см^2.

2) $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{8}{CD} = \frac{4}{6 - CD} \Rightarrow CD = 4$ см; $BD = 2$ см.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{AB \cdot BC}{AB \cdot BD} = \frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 2} = \frac{3}{1}.$$

Ответ: $BD = 2$ см; $CD = 4$ см; $\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{3}{1}$.

3) а) $\frac{S_{ABC}}{S_{CMN}} = \frac{CB \cdot CA}{CM \cdot CN} = \frac{3CM \cdot 4CN}{CM \cdot CN} = 12 \Rightarrow S_{CMN} = 3$ см^2.

б) $\frac{S_{ABC}}{S_{AKN}} = \frac{AB \cdot AC}{AK \cdot AN} = \frac{2AK \cdot 4CN}{AK \cdot 3CN} = \frac{8}{3} \Rightarrow S_{AKN} = 13{,}5$ см^2.

в) $S_{BKNM} = 36 - 3 - 13{,}5 = 19{,}5$ см^2.

Ответ: а) $S_{CMN} = 3$ см^2; б) $S_{AKN} = 13{,}5$ см^2; в) $S_{BKNM} = 19{,}5$ см^2.

III. Работа по теме урока

– Сформулируйте признаки равенства треугольников.
– Как вы думаете, существуют ли признаки подобия треугольников?

– Сформулируйте признаки подобия треугольников (работа в группах).

(В ходе обсуждения можно использовать частные случаи.)

Итак, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны. Это утверждение является первым признаком подобия треугольников и требует доказательства.

Первый признак подобия треугольников

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 7.13) и запись:

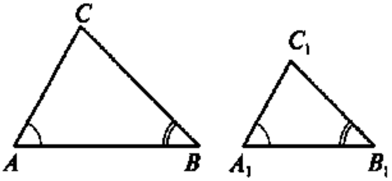


Рис. 7.13

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$.

2) $\angle A = \angle A_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (1).

3) $\angle C = \angle C_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AC \cdot BC}{A_1C_1 \cdot B_1C_1}$ (2).

4) Из (1) и (2) следует $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ (3).

5) Так как $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$, то $BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$ (4).

6) Из (3) и (4) следует $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Первый признак подобия треугольников часто называют признаком подобия треугольников по двум углам.

(П. 5 доказательства теоремы доказать самостоятельно на уроке или дома.)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях:

1) Решить задачу № 55 (самостоятельно).

– Какие два угла треугольника *ABC* равны двум углам треугольника *DBE*? Почему?

– Чему равен коэффициент подобия данных треугольников?

2) Решить задачу № 56 (самостоятельно)

(В конце урока учащиеся сдают рабочие тетради на проверку.)

2. Решить задачу № 551 (а) (самостоятельно).

План решения задачи:

1) Доказать, что $\Delta AED \sim \Delta FEC$.

2) Найти сходственные стороны этих треугольников и коэффициент подобия.

3) Найти EF и FC.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольниках AED и FEC?

– Как найти коэффициент подобия этих треугольников?

Краткое решение: $\Delta AED \sim \Delta FEC$ ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные (рис. 7.14), $\angle 3 = \angle 4$, так как $BC \parallel AD$) $\Rightarrow \dfrac{AE}{FE} = \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{FC}$.

Так как $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{8}{4} = 2$, то $k = 2 \Rightarrow \dfrac{AE}{FE} = 2$ и $FE = \dfrac{AE}{2} = 5$ см. $\dfrac{AD}{FC} = 2$ и $FC = \dfrac{AD}{2} = 3{,}5$ см.

Ответ: $FC = 3{,}5$ см, $FE = 5$ см.

3. Решить задачу № 555 (а) (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Краткое решение: $AMNP$ – параллелограмм (рис. 7.15). $\dfrac{PN}{MN} = \dfrac{2}{3}$, тогда $PN = x$, $MN = 1{,}5x$. $PC = 15 - 1{,}5x$; $BM = 10 - x$.

$\Delta PNC \sim \Delta MBN \Rightarrow \dfrac{PC}{MN} = \dfrac{PN}{BM} \Rightarrow \dfrac{15 - 1{,}5x}{1{,}5x} = \dfrac{x}{10 - x} \Rightarrow x = 5$ см, $PN = 5$ см, $MN = 7{,}5$ см.

Ответ: 5 см; 5 см; 7,5 см; 7,5 см.

4. Решить дополнительную задачу.

На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E. KE пересекает сторону BC в точке M, а сторону AD – в точке F. Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

Решение: $\Delta AEF \sim \Delta CKM$ по двум углам (рис. 7.16) ($\angle E = \angle K$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей EK; $\angle AFE = \angle MFD$, $\angle KMC = \angle BMF$ как вертикальные, а $\angle MFD = \angle BMF$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей MF).

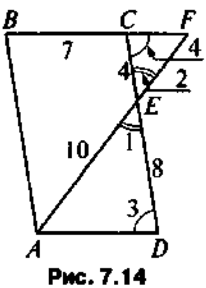


Рис. 7.14

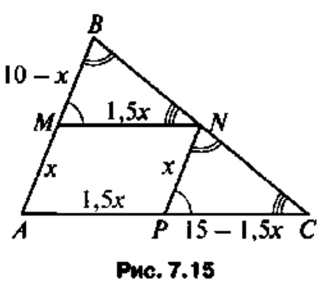


Рис. 7.15

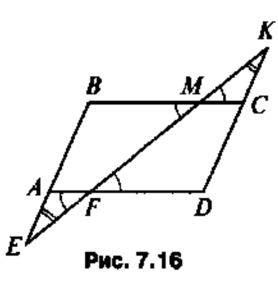


Рис. 7.16

Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональные, поэтому $\frac{AE}{CK} = \frac{EF}{KM} = \frac{AF}{CM}$, т. е. $AE : CK = AF : CM$, откуда $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.
3. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.
4. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.

Домашнее задание

1. П. 61, вопрос 5 (учебник, с. 158).
2. Решить задачи № 550, 551 (б), 553, 555 (б).
3. Решить дополнительную задачу.

В остроугольном треугольнике ABC BD и AE – высоты. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

Урок 34. Решение задач на применение первого признака подобия треугольников

Основная дидактическая цель урока: сформировать у учащихся навыки решения задач на применение первого признака подобия треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Доказать теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.

(Один ученик готовит доказательство теоремы у доски. Заслушать после проведения фронтального теоретического опроса.)

2. Фронтальный теоретический опрос.

– Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
– Чему равно отношение периметров подобных треугольников?
– Какие треугольники называются подобными?
– Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.

III. Решение задач по готовым чертежам

Решить задачи (самостоятельно).

(Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Учитель индивидуально проверяет домашнее задание.)

1. Рис. 7.17.

Найти: BC, MN.

2. *Дано:* $DE \parallel AC$ (рис. 7.18).

Найти: AB, BC.

3. *Дано:* $a \parallel b$ (рис. 7.19).

Найти: x, y.

4. Рис. 7.20.

Найти: BD.

5. Рис. 7.21.

Найти: CO, BO.

6. Рис. 7.22.

Найти: BC.

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1. $BC = 3{,}2$, $MN = 22{,}4$.
2. $AB = 18$, $BC = 12$.
3. $x = 4$, $y = 5$.
4. $BD = 8$.
5. $CO = 4$, $BO = 12$.
6. $BC = 15$.

IV. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 58.

Рис. 7.17

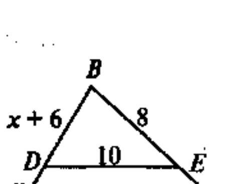


Рис. 7.18

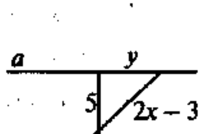


Рис. 7.19

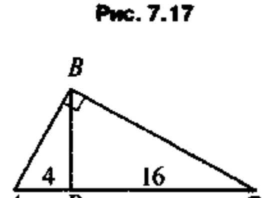


Рис. 7.20

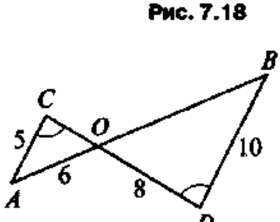


Рис. 7.21

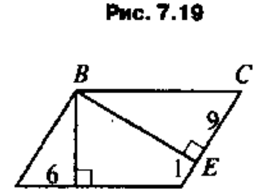


Рис. 7.22

(Учащиеся самостоятельно решают задачу, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачу № 554 (работа в парах).

Задача № 554

Решение: $\Delta AMD \sim \Delta BMC$ по двум углам ($\angle DAM = \angle CBM$, $\angle M$ – общий) (рис. 7.23), следовательно, $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$.

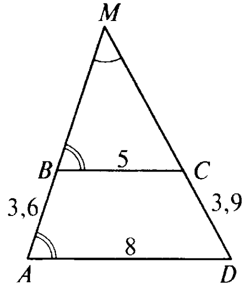


Рис. 7.23

Так как $\frac{AD}{BC} = \frac{8}{5}$, то $\frac{AM}{BM} = \frac{8}{5}$, $\frac{DM}{CM} = \frac{8}{5}$.

$AM = AB + BM$, тогда $AM = 3{,}6 + BM$, следовательно, $\frac{3{,}6 + BM}{BM} = \frac{8}{5}$, отсюда $5 \cdot (3{,}6 + BM) = 8 \cdot BM$.

$18 = 3BM$; $BM = 6$ см.

$DM = DC + MC$, тогда $DM = 3{,}9 + CM$, отсюда $\frac{3{,}9 + MC}{MC} = \frac{8}{5}$, следовательно, $5 \cdot (3{,}9 + MC) = 8 \cdot MC$, отсюда $3MC = 19{,}5$; $MC = 6{,}5$ см.

Ответ: $BM = 6$ см, $MC = 6{,}5$ см.

Наводящие вопросы.

– Есть ли на рисунке подобные треугольники? Почему вы так считаете?
– Найдите коэффициент подобия этих треугольников?
– Каким соотношением связаны сходственные стороны AM и BM? DM и CM?

3. Решить задачу № 556 (с последующим обсуждением решения).

Вопросы для обсуждения.

– Почему $\angle O = \angle CAC_1$? (*Это соответственные углы при параллельных прямых AC_1 и OD и секущей OA.*)
– Почему $\angle OAB = \angle C$? (*Это соответственные углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC.*)
– Почему $OA : AC = OB : AC_1$? (Это *сходственные стороны подобных треугольников.*)
– Докажите, что $AC_1 = BD$. (*BAC_1D – параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ по условию задачи, $AC_1 \parallel BD$ как противолежащие стороны параллелограмма.*)
– Объясните, каким образом из равенств $OA : AC = OB : AC_1$ и $AC_1 = BD$ получилось равенство $OA : OB = AC : BD$.

4. Решить задачу № 557 (а).

(На доске подготовить рисунок. Записать краткое решение задачи.)

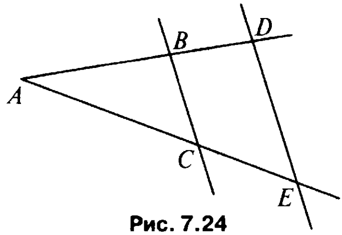


Рис. 7.24

Задача № 557 (а)

Краткое решение:

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (рис. 7.24) $\Rightarrow$ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{22-8}{22} = \frac{AC}{AC+10} \Rightarrow$ $AC = 17{,}5$ см.

Ответ: $AC = 17{,}5$ см.

Наводящие вопросы.

– Есть ли на рисунке подобные треугольники? Докажите их подобие.

– Составьте отношение сходственных сторон и найдите AC.

V. Самостоятельное решение задач

1. Решить задачи № 557 (б), 552 (в).

Задача № 557 (б)

Краткое решение: $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow$

$\frac{10}{AD} = \frac{8}{AC+CE} = \frac{4}{DE} \Rightarrow \frac{10}{AD} = \frac{8}{12} = \frac{4}{DE} \Rightarrow AD = \frac{10 \cdot 12}{8} = 15$ см,

$DE = \frac{12 \cdot 4}{8} = 6$ см. $BD = AD - AB = 15 - 10 = 5$ см.

Ответ: $BD = 5$ см, $DE = 6$ см.

Задача № 552 (в)

Краткое решение: Пусть $AO = x$ см (рис. 7.25), тогда $OC = AC - AO = (15 - x)$ см.

$\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{15-x} = \frac{96}{24} \Rightarrow 24x = 1440 - 96x;$

$120x = 1440$; $x = 12$ см, т. е. $AO = 12$ см.

Ответ: $AO = 12$ см.

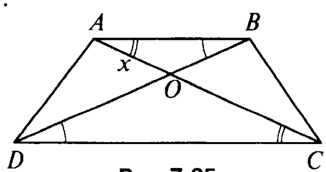


Рис. 7.25

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

2. Решить дополнительную задачу.

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как 2 : 3, $AC = 20$. Найдите длины отрезков AO и OC.

Решение: $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ (рис. 7.26) по двум углам ($\angle CBO = \angle ADO$, $\angle BCO = \angle DAO$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD), тогда $\frac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$, т. е. $OC : OA = 2 : 3$, $OA = 1{,}5 \cdot OC$.

Так как $AC = 20$, то $AC = AO + OC = 1{,}5 \times \times OC + CO = 20$, откуда $OC = 8$, тогда $AO = 12$.

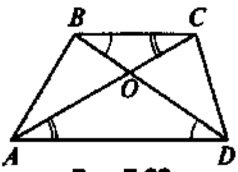


Рис. 7.26

Ответ: $AO = 12$, $OC = 8$.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
2. Сколько пар равных углов нужно найти, чтобы доказать подобие треугольников?
3. Сколько пар равных углов нужно найти у прямоугольных (равнобедренных) треугольников, чтобы данные треугольники были подобны?
4. Могут ли быть подобными равносторонние треугольники?

Домашнее задание

1. Повторить П. 61.
2. Решить задачи № 552 (а, б), 557 (в), 558.
3. Решить дополнительную задачу.

В трапеции $ABCD$ (AD и BC – основания) точка K лежит на стороне CD, причем $CK : KD = 1 : 2$. AK пересекает BD в точке O. Докажите, что если $BC : AD = 1 : 2$, $BO = OD$.

Урок 35. Второй и третий признаки подобия треугольников

Основные дидактические цели урока: рассмотреть второй и третий признаки подобия треугольников; показать применение второго и третьего признаков подобия треугольников при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 57 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Наводящие вопросы.

– Докажите, что $\Delta ABF \sim \Delta CDF$.
– Чему равен коэффициент подобия треугольников ABF и CDF?
– Найдите отношение сторон BF и DF.
– Чему равно значение DF?

2. Решение задач по готовым чертежам (самостоятельно).

(В тетрадях записать краткое решение.)

1) *Дано:* $\angle N = \angle A$, $BC = 12$ см, $MN = 6$ см, $CN = 4$ см (рис. 7.27).
Найти: AC.

2) *Дано:* $BC \perp AC$, $EF \perp AB$, $BC = 12$ см, $EF = 6$ см, $AE = 10$ см (рис. 7.28).
Найти: AB.

3) *Дано:* $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$ см, $BC = 9$ см (рис. 7.29).
Найти: AC.

3. Обсуждение решений задач, с которыми не справилось большинство учащихся.

Краткое решение:

1) $\Delta ABC \sim \Delta NMB \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{MC} = \dfrac{AC}{NC} \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{4}$, откуда $AC = 12 \cdot 4 : 6 = 8$ см.

Ответ: $AC = 8$ см.

2) $\Delta ABC \sim \Delta AEF \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow \dfrac{AB}{10} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{AF}$, откуда $AB = 10 \cdot 12 : 6 = 20$ см.

Ответ: $AB = 20$ см.

3) $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = \angle CAB \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{AD}{BA} \Rightarrow \dfrac{AC}{9} = \dfrac{4}{AC} = \dfrac{AD}{BA}$, откуда $AC^2 = 36$, $AC = 6$ см ($AC > 0$).

Ответ: $AC = 6$ см.

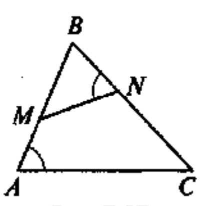


Рис. 7.27

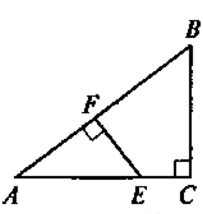


Рис. 7.28

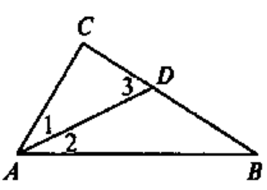


Рис. 7.29

III. Работа по теме урока

1. Формулировка темы урока.

– Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

– Существуют ли еще какие-либо признаки подобия треугольников?

2. Сформулировать другие признаки подобия треугольников (работа в группах).

3. Доказать второй и третий признаки подобия треугольников.

Второй признак подобия треугольников

Теорема: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

(Учащиеся записывают в тетрадях план-конспект доказательства теоремы.)

План-конспект доказательства теоремы

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

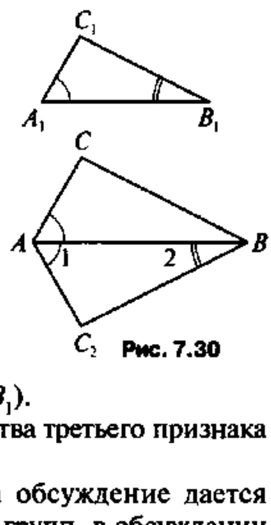


Рис. 7.30

а) ΔABC_2: $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 7.30).

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, отсюда $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$.

в) Так как $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$ (по условию) и $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$, следовательно, $AC = AC_2$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $AC = AC_2$, $\angle A = \angle 1$), следовательно, $\angle B = \angle 2 = \angle B_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

4. Составить план-конспект доказательства третьего признака подобия треугольников.

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Третий признак подобия треугольников

Теорема: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

План-конспект доказательства теоремы

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

а) ΔABC_2: $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (см. рис. 7.30).

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.

в) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (по условию) и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$, отсюда $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $BC = BC_2$, $CA = C_2A$), отсюда $\angle A = \angle 1$, $\angle 1 = \angle A_1$, следовательно, $\angle A = \angle A_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 59, 60 (работа в парах).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 59

Наводящие вопросы.

– Каким является $\angle C$ для треугольников ABC и MNC?
– Чему равно отношение сторон, заключающих этот угол ($AC : CN$ и $BC : CM$)?
– Что можно сказать о сторонах AC и BC треугольника ABC и сторонах CN и CM треугольника MNC?
– Какой признак подобия треугольников был применен при доказательстве подобия треугольников MNC и ABC?

Задача № 60

Наводящие вопросы.

– Чему равно отношение сторон MN и CD, MP и CE, NP и DE треугольников MNP и CDE?
– Что можно сказать о сторонах треугольников MNP и CDE?
– Укажите признак, на основании которого треугольники MNP и CDE подобны.

(Учащиеся, успешно справившиеся с решением задач, решают дополнительные задачи.)

2. Решить дополнительные задачи.

1) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, BE и B_1E_1 – биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $AE : EC = A_1E_1 : E_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABE \sim \Delta A_1B_1E_1$.

2) В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. Точка E лежит на стороне AB. Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5{,}25$, $ME = 4{,}5$, $AE = 1$. Прямая BM пересекает AC в точке P. Докажите, что ΔAPB равнобедренный.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте второй (третий) признак подобия треугольников.
2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого. В каком случае данные треугольники будут подобны?
3. Подобны ли равнобедренные треугольники, если у них углы между боковыми сторонами равны?
4. Подобны ли равнобедренные треугольники, если боковая сторона и основание одного из них пропорциональны боковой стороне и основанию другого?
5. Могут ли быть подобными прямоугольные треугольники, если катеты одного из них пропорциональны катетам другого?

Домашнее задание

1. П. 62, 63, вопросы 6, 7 (учебник, с. 158, 159).
2. Решить задачи № 559, 560 (б), 561.
3. Решить дополнительную задачу.

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BD и B_1D_1 – медианы, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. Докажите, что треугольник BDC подобен треугольнику $B_1D_1C_1$.

Урок 36. Решение задач на применение признаков подобия треугольников

Основные дидактические цели урока: сформировать у учащихся навыки применения признаков подобия треугольников при решении задач; совершенствовать навыки доказательств теорем.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 559, 560 (б). Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 559

Краткое решение: $AB : AD = 5 : 8$; $AF : AC = 10 : 16 = 5 : 8$ (рис. 7.31).

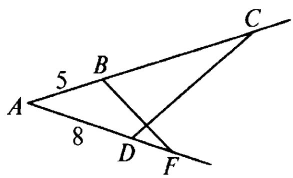


Рис. 7.31

$\angle BAF = \angle CAD \Rightarrow \Delta BAF \sim \Delta ADC$ по двум сторонам и углу между ними.

Задача № 560 (б)

Краткое решение:

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1{,}7\text{ см}}{34\text{ дм}} = \frac{1}{200}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{3\text{ см}}{60\text{ дм}} = \frac{1}{200}$,

$\frac{CA}{C_1A_1} = \frac{4{,}2\text{ см}}{84\text{ дм}} = \frac{1}{200}$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{1}{200} \Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

2. Теоретический опрос.

(Два ученика готовят доказательства теорем у доски.)

1) Сформулируйте признаки подобия треугольников.

2) Докажите теоремы, выражающие второй и третий признаки подобия треугольников.

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время теоретического опроса.)

I уровень сложности

Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если известно, что:

1. $AB = 10$ см; $BC = 5$ см; $AC = 7$ см; $A_1B_1 = 15$ см; $B_1C_1 = 7{,}5$ см; $A_1C_1 = 9{,}5$ см?

2. $\angle A = 37°$, $\angle B = 48°$, $\angle C_1 = 95°$, $\angle B_1 = 48°$?

3. $AB = 10$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 3$ см, $\angle C = \angle C_1 = 90°$?

II уровень сложности

1. Прямая, параллельная стороне MN треугольника MNK, пересекает стороны KM и KN в точках E и F соответственно, $KE = 6$ см, $KN = 10$ см, $KF = 9$ см, $KN = 15$ см. Найдите отношения: а) $EF : MN$; б) $P_{KMN} : P_{KEF}$; в) $S_{KEF} : S_{KMN}$.

2. Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. В каком отношении прямая BE делит диагональ AC параллелограмма? Найдите отношение площади треугольника ABE и четырехугольника $BCDE$.

III уровень сложности

1. Основания трапеции равны 9 и 6 см, а высота равна 10 см. Найдите разность расстояний от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

2. Докажите признак подобия прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

3. Решение задач по готовым чертежам.

1) Рис. 7.32.

Найти: $\angle C_1$, B_1C_1.

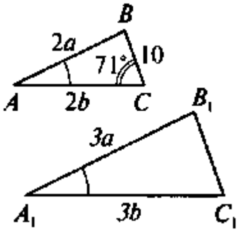


Рис. 7.32

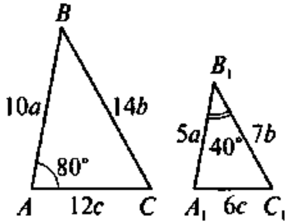


Рис. 7.33

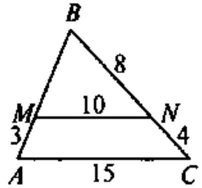


Рис. 7.34

2) Рис. 7.33.
Найти: $\angle C, \angle C_1$.
3) Рис. 7.34.
Найти: BM.
4) Рис. 7.35.
Найти: BC.

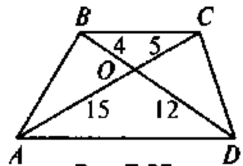


Рис. 7.35

5) Рис. 7.36.
Найти: $\angle DCA$.
6) Рис. 7.37.
Найти AB, NC.

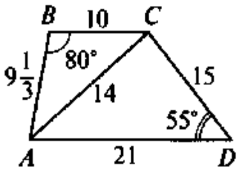


Рис. 7.36

Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $\angle C_1 = 71°$, $B_1C_1 = 15$ см.
2) $\angle C = \angle C_1 = 60°$.
3) $BM = 6$ см.
4) $BC = \frac{20}{3}$.
5) $\angle DCA = 90°$.
6) $AB = 8$, $NC = 8$.

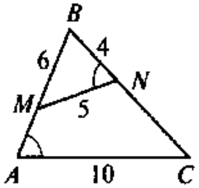


Рис. 7.37

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задачи;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – не ставится.

(Учащиеся, справившиеся со всеми задачами, решают дополнительные задачи.)

Дополнительные задачи

1. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит ее на два подобных треугольника. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.

Ответ: $S_{ABCD} = 204$ см^2.

2. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части $AD = 6$ см и $CD = 3$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ: $AC = 9$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см.

III. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 7.38.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите BO и отношение площадей треугольников BOC и AOD, $AD = 5$ см, $BC = 2$ см, $AO = 25$ см.

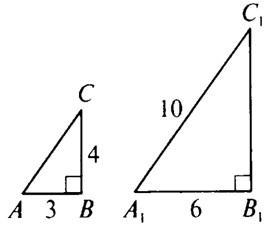


Рис. 7.38

Вариант 2

1. Рис. 7.39.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. AB и CD пересекаются в точке O, $AO = 12$ см, $BO = 4$ см, $CO = 30$ см, $DO = 10$ см. Найдите угол CAO, если $\angle DBO = 61°$. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOD.

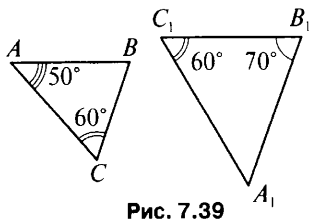


Рис. 7.39

II уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 7.40.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и H. Найдите AC и отношение площадей треугольников ABC и BMH, если $MB = 14$ см, $AB = 16$ см, $MH = 28$ см.

Вариант 2

1. Рис. 7.41.

Доказать: $\Delta MBH \sim \Delta CBA$.

2. В треугольнике ABC $AB = 15$ м, $AC = 20$ м, $BC = 32$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD = 9$ м, а на стороне AC – отрезок $AE = 12$ м. Найдите DE и отношение площадей треугольников ABC и ADE.

III уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 4$, $AC = 9$ (рис. 7.42).

Найти: AB, $S_{ABD} : S_{ABC}$.

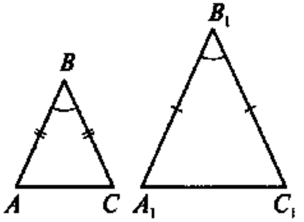


Рис. 7.40

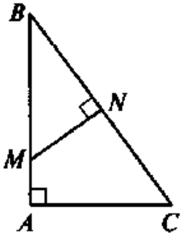


Рис. 7.41

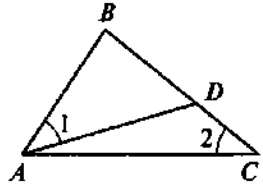


Рис. 7.42

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Докажите, что площади треугольников ACD и ABD равны.

Вариант 2

1. *Дано:* $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0{,}5AC$ (рис. 7.43).

Доказать: $AB \parallel CH$.

Найти: $S_{ABC} : S_{MCH}$.

2. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 3 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

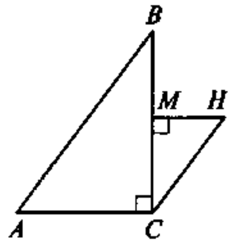


Рис. 7.43

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
2. В каком случае подобны равносторонние, равнобедренные, прямоугольные треугольники?

Домашнее задание

Решить задачи № 562, 563, 604, 605.

Урок 37. Решение задач на применение признаков подобия треугольников

Основные дидактические цели урока: совершенствовать навыки решения задач на применение признаков подобия треугольников; подготовка учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.

2. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Учитель делит класс на группы в зависимости от того, какой уровень и вариант самостоятельной работы они выполняли. В одной группе должны быть учащиеся, выполнявшие один и тот же уровень и вариант. Учитель контролирует работу групп и по мере необходимости оказывает помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. Вычислите AC и B_1C_1 по теореме Пифагора. Найдите отношение сторон ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

2. Рис. 7.44.

а) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам (каким?).

б) $BO : AO = BC : AD$, $BO = 10$ см.

в) $S_{BOC} : S_{AOD} = k^2$, $k = BC : AD = 2 : 5$, следовательно, $k^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16$.

Ответ: $BO = 10$ см, $S_{BOC} : S_{AOD} = 0{,}16$.

Вариант 2

1. Вычислите $\angle B$ и $\angle A_1$. Определите, по какому признаку $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Рис. 7.45.

а) $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

б) $\angle CAO = \angle DBO = 61°$.

в) $S_{AOC} : S_{BOD} = k^2$, $k = AO : BO = 3$, следовательно, $k^2 = 9$.

Ответ: $\angle CAO = 61°$, $S_{AOC} : S_{BOD} = 9$.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Используйте второй признак подобия треугольников, введите обозначения $AB = BC = x$, $A_1B_1 = B_1C_1 = y$.

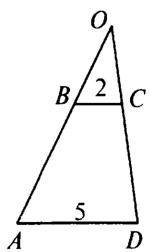


Рис. 7.44

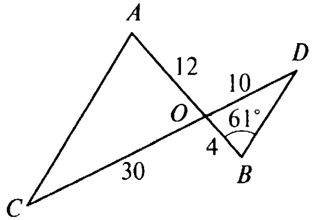


Рис. 7.45

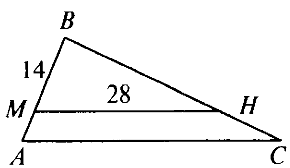


Рис. 7.46

2. Рис. 7.46.

а) $\Delta MBH \sim \Delta ABC$ по двум углам (каким?).

б) $BM : BA = MH : AC$, $AC = 32$ см.

в) $S_{ABC} : S_{BMH} = k^2$, $k = AB : BM = 16 : 14 = \frac{8}{7}$, $k^2 = \frac{64}{49}$.

Ответ: $AC = 32$ см, $S_{ABC} : S_{BMH} = 64 : 49$.

Вариант 2

1. Используйте первый признак подобия треугольников, найдите две пары равных углов.

2. Рис. 7.47.

а) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (докажите).

б) $AD : AB = DE : BC$, $DE = 19{,}2$ см.

в) $S_{ABC} : S_{ADE} = k^2$, $k = AB : AD = 5 : 3$, $k^2 = \frac{25}{9}$.

Ответ: $DE = 19{,}2$ см, $S_{ABC} : S_{ADE} = 25 : 9$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ по двум углам (каким?).

$AD : AB = AC : AB$, $AB = 6$. $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Ответ: $AB = 6$, $S_{ABD} : S_{ABC} = 4 : 9$.

2. Рис. 7.48.

а) $\Delta AOD \sim \Delta COB$ ($\angle BOC = \angle AOD$, $AO : CO = DO : BO$).

б) $BC \parallel AD$, так как $\angle BDA = \angle CBD$.

в) $S_{ACD} = S_{ABD}$, так как высоты, проведенные к стороне AD, равны.

Вариант 2

1. $\Delta ABC \sim \Delta MCH$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (каким?).

$\angle ABC = \angle MCH$, следовательно, $AB \parallel CH$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MCH}} = k^2 = \left(\frac{BC}{MC}\right)^2 = 4.$$

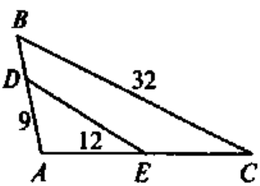


Рис. 7.47

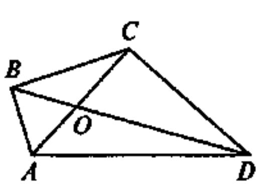


Рис. 7.48

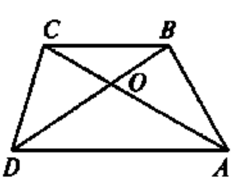


Рис. 7.49

2. Рис. 7.49.

а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам, следовательно, $BC : AD = OC : AO = 2 : 3$.

б) В ΔABC и в ΔACD высоты, проведенные к сторонам BC и AD, равны, следовательно, $S_{ABC} : S_{ACD} = 2 : 3$.

Ответ: $S_{ABC} : S_{ACD} = 2 : 3$.

III. Решение задач

Решить задачи № 1–5.

(Учитель делит класс на группы и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$, а в треугольнике MNK углы M, N, K относятся как $5 : 9 : 4$. $AB = 3$ см, $KN = 9$ см. Найдите: а) $BC : KM$; б) $S_{ABC} : S_{MNK}$; в) $P_{ABC} : P_{MNK}$.

2. *Дано:* $MN \parallel AC$, $S_{ABC} : S_{BMN} = 49 : 25$, $MN = 20$ см (рис. 7.50).

Найти: AC.

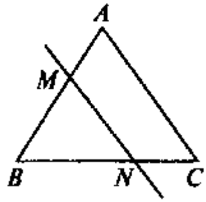


Рис. 7.50

3. В параллелограмме $ABCD$ AE – биссектриса угла A. Стороны параллелограмма AB и BC относятся как $4 : 9$. AE пересекает диагональ BD в точке K. Найдите отношение $BK : KD$.

4. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 2 и 8 см, а диагональ AC равна 4 см. В каком отношении делит диагональ AC площадь трапеции?

5. Прямая MN пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно так, что $BC = 2BM$, $AB = 2BN$, $BM : BN = 3 : 5$. Найдите: а) $P_{ABC} : P_{NBM}$; б) $S_{ABC} : S_{NBM}$; в) $MN : AC$.

Краткое решение задач:

1. $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 9 : 4$, $\angle M + \angle N + \angle K = 180° \Rightarrow \angle M = 50°$, $\angle K = 90°$, $\angle N = 40° \Rightarrow \angle A = \angle N = 40°$, $\angle B = \angle K = 90° \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta NKM$ по двум углам $\Rightarrow AB : NK = BC : KM = AC : NM$.

а) Так как $AB : NK = 3 : 9 = 1 : 3$, то $BC : KM = 1 : 3$;

б) $S_{ABC} : S_{MNK} = (AB : NK)^2 = 1 : 9$;

в) $P_{ABC} : P_{MNK} = AB : NK = 1 : 3$.

Ответ: а) $1 : 3$; б) $1 : 9$; в) $1 : 3$.

2. $\Delta ABC \sim \Delta BMN$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle BAC = \angle BMN$).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BMN}} = \frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = k^2 \Rightarrow k = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{7 \cdot 20}{5} = 28 \text{ см.}$$

Ответ: 28 см.

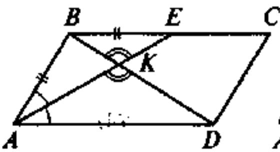


Рис. 7.51

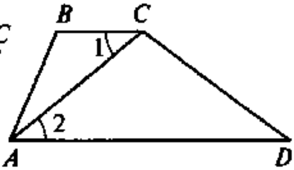


Рис. 7.52

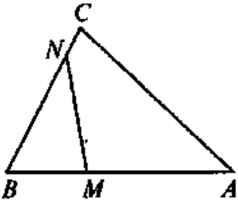


Рис. 7.53

3. Биссектриса $\angle A$ параллелограмма $ABCD$ (рис. 7.51) отсекает от него равнобедренный треугольник ABE, следовательно, $AB = BE$. Так как $AB : BC = 4 : 9$, то $BE : BC = 4 : 9$.

$BE : AD = 4 : 9$ ($BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма).

$\Delta AKD \sim \Delta EKB$ по двум углам ($\angle BKE = \angle AKD$, $\angle BEK = \angle KAD$), тогда $BK : KD = BE : AD = 4 : 9$.

Ответ: 4 : 9.

4. $\Delta ABC \sim \Delta DCA$ (рис. 7.52) по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($BC : AC = AC : AD = 1 : 4$; $\angle 1 = \angle 2$), отсюда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Ответ: 1 : 4.

5. $BM : BN = 3 : 5 \Rightarrow BM = 3x$, $BN = 5x$; $BC = 2MB \Rightarrow BC = 6x$; $AB = 2BN \Rightarrow AB = 10x$ (рис. 7.53).

$BM : BC = 3x : 6x = 1 : 2$; $BN : BA = 5x : 10x = 1 : 2$; $\angle MBN = \angle CBA$, таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta NBM$.

а) $P_{NBM} : P_{ABC} = 1 : 2$;

б) $S_{ABC} : S_{NBM} = (2 : 1)^2 = 4 : 1$;

в) $MN : AC = 1 : 2$.

Ответ: а) 1 : 2; б) 4 : 1; в) 1 : 2.

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
3. Чему равно отношение периметров, площадей подобных треугольников?
4. Сформулируйте свойство биссектрисы угла.

Домашнее задание

Решить задачи № 1–3 и дополнительно (по желанию учащихся) задачи № 4–5.

1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ AC и BD пересекаются в точке O так, что $OC = 5$ см, $OB = 6$ см, $OA = 15$ см,

$OD = 18$ см. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и найдите отношение треугольников AOD и BOC.

2. Перпендикулярно высоте BD треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и P соответственно. Найдите AB и отношение площадей треугольников MPB и ABC, если известно, что $BM = 7$ см, $BP = 9$ см, $PC = 18$ см.
3. Прямая EF пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках E и F соответственно так, что $\angle A + \angle EFC = 180°$, а площадь четырехугольника $AEFC$ относится к площади треугольника EBF как $16 : 9$. Докажите, что треугольник BFE подобен треугольнику BAC и найдите коэффициент подобия данных треугольников.
4. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой его угла, $BC \cdot BA = BD^2$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BDC$. В каком отношении площадь четырехугольника делится его диагональю BD, если известно, что $DC : AD = 3 : 2$?
5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K так, что $\Delta ABK \sim \Delta ABC$. Найдите AK, KC, BK, если известно, что $AB : BC : AC = 3 : 7 : 9$, а периметр треугольника ABC равен 57 см.

Урок 38. Контрольная работа № 3 по теме «Признаки подобия треугольников»

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Признаки подобия треугольников».

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний по теме «Признаки подобия треугольников» может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $\angle A = \angle B$, $CO = 4$, $DO = 6$, $AO = 5$ (рис. 7.54).

Найти: а) OB; б) $AC : BD$; в) $S_{AOC} : S_{BOD}$.

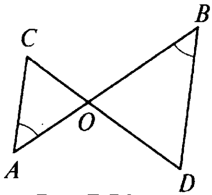


Рис. 7.54

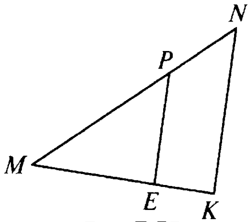


Рис. 7.55

2. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 6$ см, а в треугольнике MNK $MK = 8$ см, $MN = 12$ см, $KN = 14$ см. Найдите углы треугольника MNK, если $\angle A = 80°$, $\angle B = 60°$.

3. Прямая пересекает стороны треугольника ABC в точках M и K соответственно так, что $MK \parallel AC$, $BM : AM = 1 : 4$. Найдите периметр треугольника BMK, если периметр треугольника ABC равен 25 см.

4*. В трапеции $ABCD$ (AD и BC основание) диагонали пересекаются в точке O, $AD = 12$ см, $BC = 4$ см. Найдите площадь треугольника BOC, если площадь треугольника AOD равна 45 см^2.

Вариант 2

1. *Дано:* $PE \parallel NK$, $MP = 8$, $MN = 12$, $ME = 6$ (рис. 7.55).

Найти: а) MK; б) $PE : NK$; в) $S_{MPE} : S_{MNK}$.

2. В ΔABC $AB = 12$ см, $BC = 18$ см, $\angle B = 70°$, а в ΔMNK $MN = 6$ см, $NK = 9$ см, $\angle N = 70°$. Найдите сторону AC и угол C треугольника ABC, если $MK = 7$ см, $\angle K = 60°$.

3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle ACO = \angle BDO$, $AO : OB = 2 : 3$. Найдите периметр треугольника ACO, если периметр треугольника BOD равен 21 см.

4*. В трапеции $ABCD$ (AD и BC основания) диагонали пересекаются в точке O, $S_{AOD} = 32$ см^2, $S_{BOC} = 8$ см^2. Найдите меньшее основание трапеции, если большее из них равно 10 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $AO = 6{,}8$ см, $CO = 8{,}4$ см, $OB = 5{,}1$ см, $OD = 6{,}3$ см (рис. 7.56).

Доказать: $AC \parallel BD$.

Найти: а) $DB : AC$; б) $P_{AOC} : P_{DBO}$; в) $S_{DBO} : S_{AOC}$.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $BD = 16$ см. На стороне AB взята точка K так, что $OK \perp AB$ и $OK = 4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону ромба и вторую диагональ.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = 9$ см, $BC = 8$ см, $CD = 16$ см, $AD = 6$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

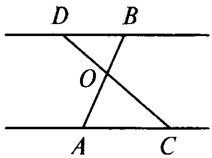


Рис. 7.56

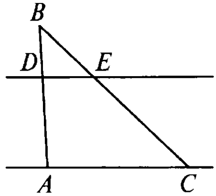


Рис. 7.57

4*. В равнобедренном треугольнике MNK с основанием MK, равным 10 см, $MN = NK = 20$ см. На стороне NK лежит точка A так, что $AK : AN = 1 : 3$. Найдите AM.

Вариант 2

1. *Дано:* $BD = 3{,}1$ см, $BE = 4{,}2$ см, $BA = 9{,}3$ см, $BC = 12{,}6$ см (рис. 7.57).

Доказать: $DE \parallel AC$.

Найти: а) $DE : AC$; б) $P_{ABC} : P_{DBE}$; в) $S_{DBE} : S_{ABC}$.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. На стороне AB взята точка K так, что $OK \perp AB$, $AK = 2$ см, $BK = 8$ см. Найдите диагонали ромба.

3. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см, $DA = 25$ см, $AC = 15$ см. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

4*. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 40$ см, $AC = 20$ см. На стороне BC отмечена точка H так, что $BH : HC = 3 : 1$. Найдите AH.

III уровень сложности

Вариант 1

1. К диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр DE так, что $AE = 8$ см, $CE = 4$ см.

Найти: а) $AB : BC$; б) P_{ABCD}; в) S_{ABCD}.

2. $ABCD$ – прямоугольная трапеция ($\angle A = 90°$). Точка E лежит на основании AD так, что CE перпендикулярен AD и $AE = DE$. Точка O – середина диагонали AC. Докажите, что $BO : BC = CD : AD$. Найдите площадь пятиугольника $ABOCD$, если площадь треугольника ACD равна 20 см^2.

3. Диагональ BD трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Найдите BD, если основания BC и AD равны 8 см и 12,5 см соответственно.

4*. На сторонах MN и NK треугольника MNK взяты точки A и B соответственно так, что $\angle ABN = \angle M$. Отрезок NE является биссектрисой угла ANB, $AE : EB = 2 : 3$. Найдите отношение NK к MN.

Вариант 2

1. К диагонали BD прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр AK так, что $BK = 5$ см, $DK = 15$ см.

Найти: а) $BC : CD$; б) P_{BCD}; в) S_{BCD}.

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle D = 90°$. Точка K лежит на основании AD так, что $AK = KD$ и BK перпендикулярно BC. Точка O – середина диагонали BD. Докажите, что $AB : AD = BO : BC$. Найдите площадь треугольника ABD, если площадь пятиугольника $ABOCD$ равна 30 см^2.

3. Диагональ AC трапеции $ABCD$ равна 8 см и делит ее на два подобных треугольника. Найдите основание BC, если AD равно 16 см.

4*. На сторонах PO и PS треугольника OPS взяты точки A и B соответственно так, что $\angle PAB = \angle S$. Биссектриса PC треугольника OPS делит сторону OS на два отрезка так, что $OC : CS = 4 : 3$. Найдите отношение PB к PA.

Итоговый тест № 3

Вариант 1

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. AB и CD пересекаются в точке O, $AO = 12$ см, $BO = 4$ см, $CO = 30$ см, $DO = 10$ см. $\angle DOB = 52°$, $\angle DBO = 61°$. Угол ACO равен:

1) 61°;	3) 67°;
2) 52°;	4) 57°.

А2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно, $BE = 8$ см, $AB = 12$ см, $BK = 6$ см, $BC = 9$ см, $EK = 10$ см. Сторона AC равна:

1) 13 см;	3) 14 см;
2) 15 см;	4) 16 см.

А3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$, а в треугольнике MNK углы M, N, K относятся как $5 : 9 : 4$. $AB = 3$ см, $KN = 9$ см. Отношение $BC : NM$ равно:

1) 1 : 3;	3) 1 : 2;
2) 3 : 1;	4) 2 : 1.

А4. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и H. $MB = 14$ см, $AB = 16$ см, $MH = 28$ см. Сторона AC равна:

1) 30 см;
2) 4 см;
3) 28 см;
4) 32 см.

А5. Периметр подобных треугольников относится как 2 : 3, сумма их площадей равна 260 см^2. Площадь меньшего треугольника равна:

1) 80 см^2; 3) 104 см^2;
2) 180 см^2; 4) 156 см^2.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Периметр треугольника равен 70 см, две его стороны равны 24 и 32 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

В2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как 2 : 3, $AC = 20$. Найдите длины отрезков AO и OC.

В3. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит ее на два подобных треугольника. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 3 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

С2. В параллелограмме $ABCD$ AE – биссектриса угла A. Стороны параллелограмма AB и BC относятся как 4 : 9. AE пересекает диагональ BD в точке K. Найти отношение $BK : KD$.

Вариант 2

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, $AD = 5$ см, $BC = 2$ см, $AO = 25$ см. Отрезок BO равен:

1) 15 см; 3) 20 см;
2) 5 см; 4) 10 см.

А2. Прямая, параллельная стороне MN треугольника MNK, пересекает стороны KM и KN в точках E и F соответственно, $KE = 6$ см, $KM = 10$ см, $KF = 9$ см, $KN = 15$ см, $MN = 20$ см. Сторона EF равна:

1) 14 см; 3) 12 см;
2) 16 см; 4) 15 см.

А3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$, а в треугольнике MNK углы M, N, K относятся как 5 : 9 : 4. $AB = 10$ см, $KN = 15$ см. Отношение $BC : NM$ равно:

1) 3 : 2;
2) 2 : 3;
3) 2 : 5;
4) 3 : 5.

А4. В треугольнике ABC $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $BC = 32$ см. На стороне AB отложен отрезок $AD = 9$ см, а на стороне AC — отрезок $AE = 12$ см. Отрезок DE равен:

1) 19,2 см; 3) 15 см;
2) 12 см; 4) 18 см.

А5. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дм. Периметр большего треугольника равна:

1) 52 дм; 3) 46 дм;
2) 71 дм; 4) 65 дм.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Периметр треугольника равен 40 см, две его стороны равны 15 см и 9 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

В2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как 3 : 5, $BD = 24$. Найдите длины отрезков BO и OD.

В3. Основания трапеции равны 9 см и 6 см, а высота равна 10 см. Найдите разность расстояний от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 5 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

С2. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 2 см и 8 см, а диагональ AC равна 4 см. В каком отношении делит диагональ AC площадь трапеции?

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Ответы и указания к задачам контрольной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ по двум углам.
$AO : BO = CO : DO$, следовательно, $OB = 7,5$.
$AC : BD = 2 : 3$.

$S_{AOC} : S_{BOD} = 4 : 9$.

Ответ: а) 7,5; б) 2 : 3; в) 4 : 9.

2. $AB : MK = 1 : 2$, $BC : KN = 1 : 2$, $AC : MN = 1 : 2$. $\Delta ABC \sim \Delta MKN$. $\angle M = \angle A = 80°$, $\angle K = \angle B = 60°$. $\angle N = 180° - (\angle M + \angle K) = 40°$.

Ответ: 80°, 60°, 40°.

3. Рис. 7.58.

а) $\Delta BMK \sim \Delta BAC$ по двум углам, следовательно,

$\frac{BM}{BA} = \frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}$.

б) $P_{BMK} : P_{ABC} = 1 : 5$, следовательно, $P_{BMK} = 5$ см.

Ответ: 5 см.

4*. Рис. 7.59.

а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.

б) $\frac{BO}{DO} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = k$.

в) $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = k^2 = \frac{1}{9}$, следовательно, $S_{BOC} = 5$ см^2.

Вариант 2

1. $\Delta MPE \sim \Delta MNK$ по двум углам.

$MP : MN = ME : MK$, следовательно, $MK = 9$.

$PE : NK = 2 : 3$.

$S_{MPE} : S_{MKN} = 4 : 9$.

Ответ: а) 9; б) 2 : 3; в) 4 : 9.

2. $AB : MN = 2$, $BC : NK = 2$, $\angle B = \angle N$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$.

$AC : MK = 2$, значит, $AC = 14$ см, $\angle C = \angle K = 60°$.

Ответ: $AC = 14$ см, $\angle C = 60°$.

3. Рис. 7.60.

а) $\Delta ACO \sim \Delta BDO$ по двум углам, следовательно,

$\frac{AC}{BD} = \frac{CO}{DO} = \frac{AO}{BO} = \frac{2}{3}$.

б) $P_{ACO} : P_{BDO} = 2 : 3$, следовательно, $P_{ACO} = 14$ см.

Ответ: 14 см.

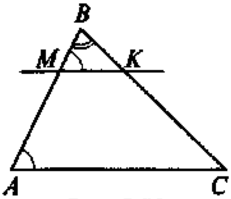


Рис. 7.58

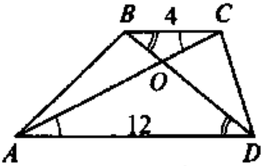


Рис. 7.59

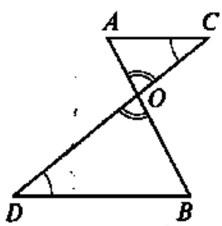


Рис. 7.60

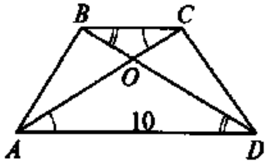


Рис. 7.61

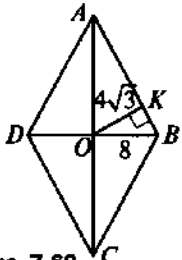


Рис. 7.62

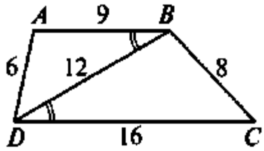


Рис. 7.63

4*. Рис. 7.61.

а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.

б) $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = k^2$, значит, $k = 0{,}5$.

в) $BC : AD = k = 0{,}5$, следовательно, $BC = 5$ см.

Ответ: 5 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. $AO : OB = CO : DO = 4 : 3$, $\angle AOC = \angle BOD$, отсюда $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ и $\angle OBD = \angle OAC$, следовательно, $AC \parallel BD$.

$DB : AC = BO : AO = 3 : 4$. $P_{AOC} : P_{DBO} = 4 : 3$.

$\frac{S_{DBO}}{S_{AOC}} = \left(\frac{BO}{AO}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Ответ: а) 3 : 4; б) 4 : 3; в) 9 : 16.

2. $\Delta AOK \sim \Delta OBK$, следовательно (рис. 7.62), $\frac{AO}{OB} = \frac{OK}{BK} = \frac{AK}{OK}$,

т. е. $\frac{AO}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{BK} = \frac{AK}{4\sqrt{3}}$.

По теореме Пифагора $BK^2 = OB^2 - OK^2 = 16$, значит, $BK = 4$ см, следовательно, $AO = 8\sqrt{3}$ см, $AC = 16\sqrt{3}$ см, $AB = 16$ см.

Ответ: $AB = 16$ см, $AC = 16\sqrt{3}$.

3. $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{DB} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$, следовательно, $\Delta ABD \sim \Delta BDC$, отсюда $\angle ABD = \angle BDC$, значит, $AB \parallel DC$ (рис. 7.63).

$\angle ADB \neq \angle DBC$, следовательно, AD не параллельна BC. Таким образом, $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и DC.

4*. $KA : MK = KM : MN = 1 : 2$, $\angle K = \angle NMK$, следовательно, $\Delta MNK \sim \Delta KMA$, тогда так как $\angle NMK = \angle NKM$, то $\angle MKA = \angle MAK$, т. е. ΔKMA – равнобедренный с основанием AK, следовательно, $AM = MK = 10$ см (рис. 7.64).

Ответ: 10 см.

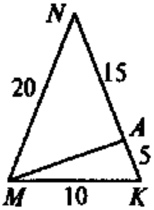


Рис. 7.64

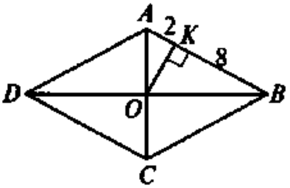


Рис. 7.65

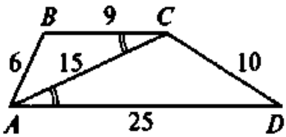


Рис. 7.66

Вариант 2

1. $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{3}$, $\angle B$ – общий, отсюда $\Delta BDE \sim \Delta BAC$, следовательно, $\angle BDE = \angle BAC$, отсюда $DE \parallel AC$.

а) $DE : AC = BD : BA = 1 : 3$.

б) $P_{ABC} : P_{DBE} = 3 : 1$.

в) $\dfrac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{BD}{BA}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: а) 1 : 3; б) 3 : 1; в) 1 : 9.

2. $\Delta AOK \sim \Delta OBK$, следовательно, $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{OK}{BK} = \dfrac{AK}{OK}$, значит, $OK^2 = AK \cdot BK = 16$, т. е. $OK = 4$ (рис. 7.65).

По теореме Пифагора $AO^2 = OK^2 + AK^2 = 20$, следовательно, $AO = 2\sqrt{5}$ см, $AC = 4\sqrt{5}$ см. $OB^2 = OK^2 + KB^2 = 80$, следовательно, $OB = 4\sqrt{5}$ см. $BD = 8\sqrt{5}$.

Ответ: $AC = 4\sqrt{5}$, $BD = 8\sqrt{5}$.

3. $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta DCA$, отсюда $\angle ACB = \angle CAD$, значит, $BC \parallel AD$ (рис. 7.66).

$\angle BAC \neq \angle ACD$, следовательно, AB не параллельна CD, значит, $ABCD$ – трапеция с основаниями BC и AD.

4*. $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$, $\angle HCA = \angle BAC$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta CAH$ (рис. 7.67).

Так как $\angle BAC = \angle BCA$, то $\angle ACH = \angle AHC$, т. е. ΔCAH – равнобедренный с основанием HC, следовательно, $AH = AC = 20$ см.

Ответ: 20 см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 7.68.

а) $\Delta AED \sim \Delta DEC$, следовательно, $AB : BC = CD : AD$; $EC : DE = DE : AE$, значит, $DE = \sqrt{EC \cdot AE} = 4\sqrt{2}$ см, отсюда $\dfrac{EC}{DE} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

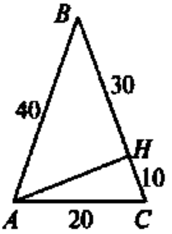


Рис. 7.67

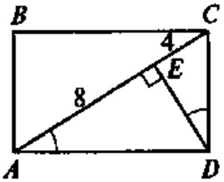


Рис. 7.68

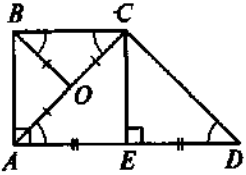


Рис. 7.69

б) $AD^2 = AE^2 + ED^2$, значит, $AD = 4\sqrt{6}$ см.

$CD^2 = DE^2 + CE^2$, отсюда $CD = 4\sqrt{3}$ см.

$P_{ABCD} = 8\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см.

в) $S_{ABCD} = 48\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $8\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см; в) $48\sqrt{2}$ см^2.

2. Рис. 7.69.

а) ΔBOC и ΔACD – равнобедренные, $\angle CAD = \angle BCO$, следовательно, $\angle CDA = \angle CBO$, значит, $\Delta BOC \sim \Delta DCA$, отсюда $BO : CD = BC : AD$, т. е. $BO : BC = CD : AD$.

б) O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCE$.

$S_{ACD} = S_{ABCE} = 20$ см^2. $S_{BOA} = S_{ABCE} : 4 = 5$ см^2.

$S_{ABOCD} = S_{ACD} + S_{BOA} = 25$ см^2.

Ответ: 25 см^2.

3. $\Delta BCD \sim \Delta DBA$, следовательно, $BC : BD = BD : AD$, значит, $BD = 10$ см (рис. 7.70).

Ответ: 10 см.

4*. Рис. 7.71.

а) NE – биссектриса ΔANB, следовательно, $AN : AE = BN : EB$, значит, $AN : BN = AE : EB = 2 : 3$.

б) $\Delta NBA \sim \Delta NMK$, следовательно, $NK : NA = MN : NB$, значит, $NK : MN = NA : NB = 2 : 3$.

Ответ: 2 : 3.

Вариант 2

1. Рис. 7.72.

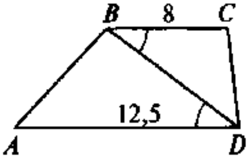


Рис. 7.70

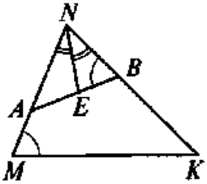


Рис. 7.71

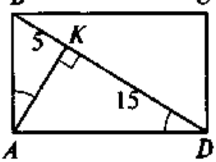


Рис. 7.72

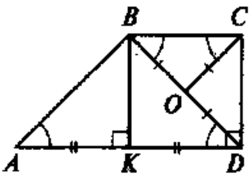


Рис. 7.73

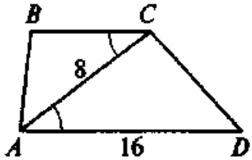


Рис. 7.74

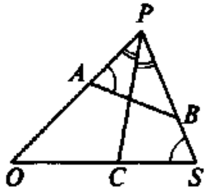


Рис. 7.75

а) $\Delta AKB \sim \Delta DKA$, следовательно, $BK : AK = AK : KD$, откуда $AK = \sqrt{BK \cdot KD} = 5\sqrt{3}$ см, значит, $\frac{BK}{AK} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB} = \frac{AK}{BK} = \sqrt{3}$.

б) $AB^2 = BK^2 + AK^2$, следовательно, $AB = 10$ см. $AD^2 = AK^2 + KD^2$, значит, $AD = 10\sqrt{3}$ см. $P_{ABCD} = 20(\sqrt{3}+1)$ см.

в) $S_{ABCD} = 100\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) $20(\sqrt{3}+1)$ см; в) $100\sqrt{3}$ см^2.

2. Рис. 7.73.

а) ΔABD и ΔCOB – равнобедренные, $\angle BDA = \angle OBC$, следовательно, $\angle BAD = \angle OCB$, значит, $\Delta COB \sim \Delta ABD$, откуда $BC : AD = BO : AB$, т. е. $AB : AD = BO : BC$.

б) O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $KBCD$.
$S_{ABOCD} = S_{ABD} + S_{OCD}$. $S_{OCD} = S_{KBCD} : 4$, $S_{ABD} = S_{KBCD}$.
$S_{ABOCD} = S_{KBCD} \cdot 5 : 4 \Rightarrow S_{KBCD} = 24$ см^2.
Ответ: 24 см^2.

3. $\Delta ABC \sim \Delta DCA$, следовательно, $BC : CA = CA : AD$, значит, $BC = 4$ см (рис. 7.74).

Ответ: 4 см.

4*. Рис. 7.75.

а) PC – биссектриса ΔOPS, следовательно, $PO : OC = SP : SC$, значит, $PO : SP = OC : SC = 4 : 3$.

б) $\Delta OPS \sim \Delta BPA$, следовательно, $PB : PO = PA : SP$, значит, $PB : PA = PO : SP = 4 : 3$.

Ответ: 4 : 3.

Ответы итогового теста № 3:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	C1	C2
1	3	2	1	4	1	6 см и 8 см	$AO = 12$ см, $OC = 8$ см	204 см^2	2 : 3	4 : 9
2	4	3	2	1	4	10 см и 6 см	$BO = 9$ см, $OD = 15$ см	2 см	3 : 5	1 : 4

Критерии оценивания результатов контрольной работы:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

За правильно решенную дополнительную задачу (№ 4) ставится дополнительная оценка.

Критерии оценивания результатов итогового теста:

- оценка «5» – учащийся набрал 14–19 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 9–13 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–8 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

За каждое правильно выполненное задание части А ставится 1 балл, части В – 2 балла, части С – 4 балла.

Урок 39. Средняя линия треугольника

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему о средней линии треугольника и свойство медиан треугольника, показать их применение в процессе решения задач; совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.
2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.
3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

III. Подготовка к восприятию нового материала

Повторение теоретического материала в процессе решения задач по готовым чертежам.

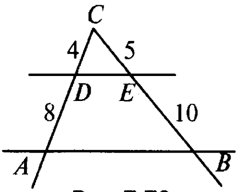


Рис. 7.76

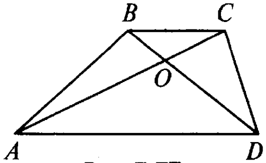


Рис. 7.77

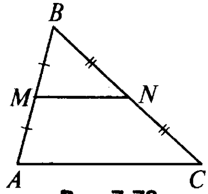


Рис. 7.78

1. *Дано:* $CD = 4$, $AD = 8$, $CE = 5$, $BE = 10$ (рис. 7.76).
Доказать:
а) $\Delta CDE \sim \Delta CAB$;
б) $AB \parallel DE$.
2. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.77).
Доказать:
а) $BO : OD = CO : OA$;
б) $DO : BO = 2$, если $BC = \frac{AD}{2}$.

IV. Работа по теме урока

1. Ввести определение средней линии треугольника.
Определение: Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.
На доске и в тетрадях рисунок (рис. 7.78) и запись:
Если $AM = MB$ и $CN = NB$, то MN – средняя линия ΔABC.
2. Свойства средней линии треугольника (работа в группах).
(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении участвует весь класс.)
3. Теорема о средней линии треугольника с доказательством.
На доске и в тетрадях рисунок (рис. 7.79) и запись:

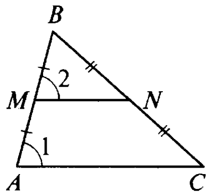


Рис. 7.79

Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.
Дано: ΔABC, MN – средняя линия.
Доказать: $MN \parallel AC$, $MN = AC : 2$.
Доказательство:
а) $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ ($BM : BA = BN : BC = 1 : 2$, $\angle B$ – общий).
б) $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $MN \parallel AC$.
в) $MN : AC = BM : BA = 1 : 2$, следовательно, $MN = AC : 2$.
4. Решить задачи № 564, 565 (устно).
(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)
5. Решение задач.
Решить задачу № 1 на с. 146 учебника (работа в группах).

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Указания для решения задачи.

1) Постройте две медианы треугольника и докажите, что точка пересечения делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2) Постройте третью медиану и докажите, что она проходит через точку пересечения первых двух и делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Наводящие вопросы.

– Соедините точки A_1 и B_1 отрезком. Что можно сказать о треугольниках AOB и A_1OB_1?

– Почему медианы CC_1 и BB_1 также пересекаются в точке O?

Это свойство называют свойством медиан треугольника, оно широко используется при решении задач.

6. Решить задачу для закрепления свойства медиан треугольника (устно).

Дано: В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1, равные соответственно 6 см, 9 см и 12 см, пересекаются в точке O (рис. 7.80).

Найти: $AO + OB + CO$.

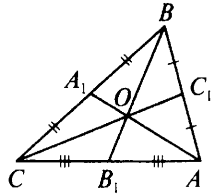


Рис. 7.80

V. Работа в рабочих тетрадях

1. Решить задачи № 61, 62 (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

2. Решить дополнительные задачи (С-19, с. 25, вариант 3). (См. Дидактические материалы по геометрии. 8 класс. Зив Б.Г., Мейлер В.М. М.: Просвещение, 1992 (далее – *Д.М.*).)

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Что называют средней линией треугольника?
2. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.
3. Средние линии треугольника равны 5 см, 7 см и 8 см. Найдите периметр треугольника.
4. Сформулируйте свойство медиан треугольника.

Домашнее задание

1. П. 64, вопросы 8, 9 (учебник, 159).
2. Решить задачу № 63 (рабочая тетрадь).
3. Решить задачи № 570, 571.

4. Решить дополнительную задачу.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана BB_1 равна 10 см. Найдите медианы AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$ см.

Ответ: $AA_1 = 4\sqrt{10}$ см, $CC_1 = 2\sqrt{13}$ см.

Урок 40. Средняя линия треугольника. Свойство медиан треугольника

Основная дидактическая цель урока: совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о средней линии треугольника и свойства медиан треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика готовят доказательства теорем у доски.)

1) Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

2) Сформулируйте и докажите свойство медиан треугольника.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 570, 571. Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать после решения задач по готовым чертежам.)

3. Решение задач по готовым чертежам.

I уровень сложности (устно с обсуждением решений).

1) Рис. 7.81.

Найти: а) EF, если $BC = 10{,}6$; б) BC, если $EF = 4{,}2$.

2) *Дано:* $MN \parallel AC$, $MK \parallel BC$ (рис. 7.82).

Найти: P_{ABC}.

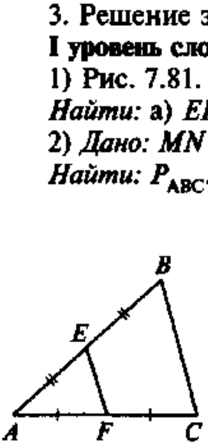


Рис. 7.81

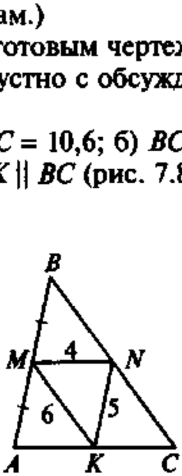


Рис. 7.82

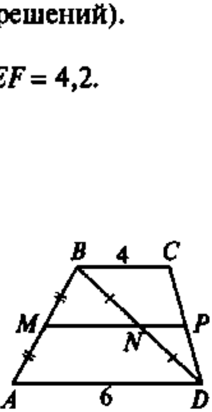


Рис. 7.83

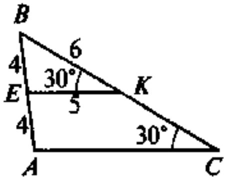


Рис. 7.84

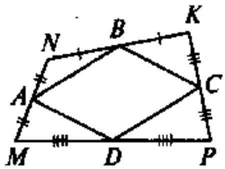


Рис. 7.85

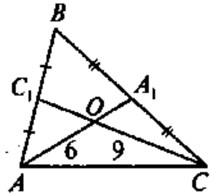


Рис. 7.86

3) *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.83).

Найти: MP.

4) Рис. 7.84.

Найти: BC, AC.

5) Рис. 7.85.

Доказать: $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $ABCD$ – параллелограмм.

6) Рис. 7.86.

Найти: C_1O, A_1O.

II уровень сложности (письменно с последующей проверкой по готовым ответам).

1) Рис. 7.87.

Найти: MK.

2) Рис. 7.88.

Найти: KL.

3) Рис. 7.89.

Найти: MF.

4) *Дано:* O – точка пересечения медиан, $MN \parallel AC$ (рис. 7.90).

Найти: MN.

5) Рис. 7.91.

Найти: AD.

6) *Дано:* $S_{ABC} = 369$ см^2 (рис. 7.92).

Найти: а) S_{ABB_1}; б) S_{AOC}.

Ответы к задачам II уровня сложности:

1) $MK = 12$.

2) $KL = 5$.

3) $MF = 4$.

4) $MN = 8$.

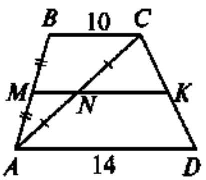


Рис. 7.87

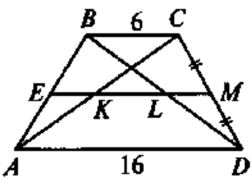


Рис. 7.88

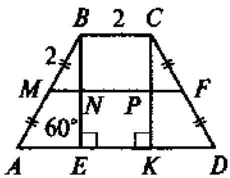


Рис. 7.89

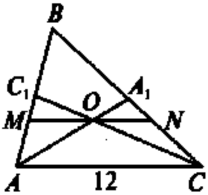


Рис. 7.90

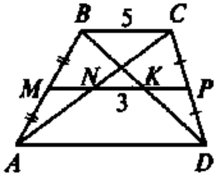


Рис. 7.91

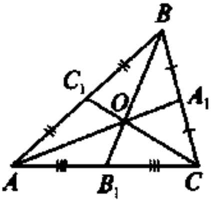


Рис. 7.92

5) $AD = 11$.

6) а) $S_{ABB_1} = 15$ см^2, б) $S_{AOC} = 12$ см^2.

III. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 66.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить дополнительные задачи (*Д.М.*).

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях. по окончании работы идет обсуждение решения задач.)

Задача С-19 (с. 35, № 1)

Решение: Так как BP и AQ равны и лежат на параллельных прямых, $ABPQ$ – параллелограмм, E – точка пересечения его диагоналей, следовательно, $BE = EQ$, т. е. E – середина BQ (рис. 7.93).

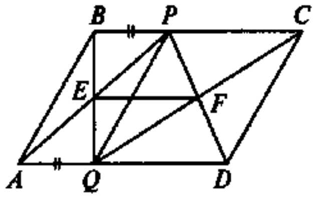


Рис. 7.93

$QPCD$ – параллелограмм, так как $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AB \parallel PQ$, $AB = PQ$. Тогда $PQ = CD$, $PQ \parallel CD$, следовательно, F – точка пересечения диагоналей параллелограмма, т. е. $QF = FC$, F – середина QC.

В треугольнике BQC E – середина BQ, F – середина QC, т. е. EF – средняя линия треугольника, следовательно, $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Задача С-19 (с. 35, № 2)

Решение: Медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины, т. е. $BO : OB_1 = 2 : 1$ (рис. 7.94).

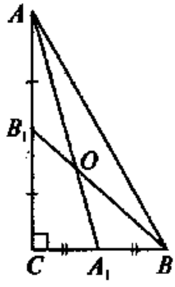


Рис. 7.94

Так как $BO = 10$ см, то $OB_1 = 5$ см. Тогда $BB_1 = 15$ см.

В прямоугольном треугольнике BB_1C по теореме Пифагора $B_1C^2 = BB_1{}^2 - BC^2 = 15^2 - 9^2 = 144$, следовательно, $B_1C = 12$ см.

Так как BB_1 – медиана, то $AC = B_1C \cdot 2 = 24$ см, $S_{ABC} = AC \cdot CB : 2 = 24 \cdot 9 : 2 = 108$ см^2.

Ответ: 108 см^2.

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. E и F – середины сторон AB и BC треугольника ABC. Найдите EF и $\angle BEF$, если $AC = 14$ см, $\angle A = 72°$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до вершины B данного треугольника, если $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см.

Вариант 2

1. M и N – середина сторон AC и CB треугольника ABC. Найдите AB и $\angle B$, если $MN = 8$ см, $\angle CNM = 46°$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC O – точка пересечения медиан. Найдите расстояние от точки O до вершины A данного треугольника, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, E и F – середины сторон AB и BC, $OE = 4$ см, $OF = 5$ см. Найдите периметр $ABCD$.

2. Вычислите медианы треугольника со сторонами 25 см, 25 см, 14 см.

Вариант 2

1. $ABCD$ – параллелограмм с периметром 28 см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите расстояние от точки O до середины CD, если расстояние от точки O до середины BC равно 3 см.

2. Вычислите медианы треугольника со сторонами 13 см, 13 см, 10 см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 30°$, $AD = 16$ см, M – середина BC. AM пересекает BD в точке N, CN пересекает AB в точке P, $AP = 6$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. В треугольнике со сторонами 15 см, 15 см и 24 см найдите расстояние от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 10$ см, E – середина CD. BE пересекает AC в точке P, DP пересекает BC в точке K, $BK = 7$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. Расстояния от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника до сторон равны 8 см, 8 см и 5 см. Найдите стороны треугольника.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.
2. Сформулируйте свойство медиан треугольника.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 568, 569.
2. Решить задачи № 64, 65 (рабочая тетрадь).
3. Решить дополнительные задачи № 1, 2 (*Д.М.:* С-19, с. 55, вариант 6).

Урок 41. Пропорциональные отрезки

Основные дидактические цели урока: ввести понятие среднего пропорционального (среднего геометрического) двух отрезков; рассмотреть задачу о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике: свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла; сформировать у учащихся навыки использования изученной темы в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 64, 65 (устно).)

2. Решить задачи по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала (фронтальная работа).

1) *Дано:* $\angle B = 90°$, $\angle C = 35°$ (рис. 7.95).

Доказать:

а) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$;

б) $\Delta ABD \sim \Delta ACB$.

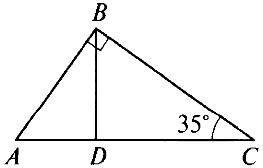


Рис. 7.95

2) *Дано:* $\angle B = 90°$ (рис. 7.96).

Найти: BD.

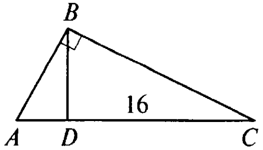


Рис. 7.96

3) *Дано:* $\angle B = 90°$.

Найти: AB, BC.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие среднего пропорционального (среднего геометрического) двух отрезков.

Определение: Отрезок XY называется средним пропорциональным (средним геометрическим) для отрезков AB и CD, если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

На доске и в тетрадях запись:

$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$, XY – среднее пропорциональное (среднее геометрическое) для отрезков AB и CD.

2. Решить задачи (устно).

1) Найти длину среднего пропорционального отрезков MN и KP, если $MN = 9$ см, $KP = 16$ см.

2) Среднее пропорциональное отрезков AB и CD равно 10, а разность их длин равна 21. Найти длины отрезков AB и CD.

3. Решить задачи (с последующим обсуждением решения).

(Учитель делит класс пополам, далее на группы по 3–4 человека. Первая половина класса решает задачу № 1, вторая – задачу № 2. Задачи группам выдать на отдельных карточках для обеспечения максимально самостоятельного подхода к решению.)

Задача № 1. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Задача № 2. Доказать, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

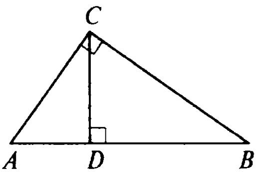


Рис. 7.97

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 7.97) и запись:

Если в ΔABC $\angle C = 90°$, CD – высота, то:

а) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; $\Delta ABC \sim \Delta CBD$; $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

б) $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

в) $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$; $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 67, 68.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить задачу № 68.)

2. Решить задачи № 572 (б, г) (самостоятельно).

(В ходе решения задач № 572 (б, г) достаточно начертить общий рисунок и записать краткое решение задач.)

Задача № 572 (б)

Краткое решение: $b_c = 36$, $a_c = 64$ (рис. 7.98).

$h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{64 \cdot 36} = 48.$

$a = \sqrt{h^2 + a_c^2} = \sqrt{48^2 + 64^2} = 80.$

$b = \sqrt{h^2 + b_c^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60.$

Ответ: $h = 48$, $a = 80$, $b = 60$.

Задача № 572 (г)

Краткое решение:

$a = 8,\ a_c = 4 \Rightarrow a = \sqrt{a_c \cdot c} \Rightarrow 8 = \sqrt{4 \cdot c} \Rightarrow \sqrt{c} = 4,\ c = 16$ (рис. 7.98).

$b = c^2 - a^2 = 16^2 - 8^2 = 8\sqrt{3} b = \sqrt{b_c \cdot c} \Rightarrow 8\sqrt{3} = \sqrt{b_c \cdot 16} \Rightarrow \sqrt{b_c} = 2\sqrt{c}, b_c = 12.$

Ответ: $b = 8\sqrt{3}$, $c = 16$, $b_c = 12$.

3. Решить дополнительные задачи (*Д.М.*).

Задача С-20 (с. 25, № 1)

Краткое решение: $\Delta BDE \sim \Delta DCE$ (рис. 7.99) по двум углам $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} = k \Rightarrow \frac{S_{BDE}}{S_{DCE}} = \frac{4}{1}$.

$S_{DCE} = 20$ см$^2 \Rightarrow S_{BDE} = 80$ см^2.

$S_{BDC} = S_{DCE} + S_{BDE} = 100$ см^2.

$\Delta ABD = \Delta CBD \Rightarrow S_{ABD} = S_{CBD} = 100$ см$^2 \Rightarrow S_{ABC} = 200$ см^2.

Ответ: 200 см^2.

Задача С-20 (с. 25, № 2)

Краткое решение: ΔABC – прямоугольный (рис. 7.100) $\Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

$BE \perp AC \Rightarrow AB = \sqrt{AE \cdot AC} \Rightarrow \sqrt{AE} = \frac{AB}{\sqrt{AC}} = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{52}}} \Rightarrow$

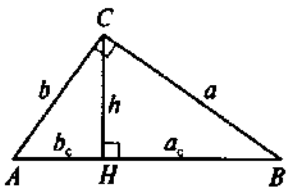


Рис. 7.98

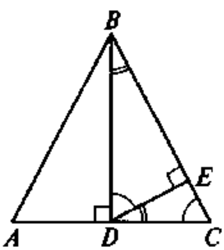


Рис. 7.99

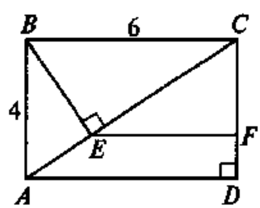


Рис. 7.100

$$AE = \frac{16}{\sqrt{52}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \Rightarrow CE = 2\sqrt{13} - \frac{8\sqrt{13}}{13} = \frac{18\sqrt{13}}{13}.$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ECF \Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{AD}{EF}.$$

Тогда $EF = \dfrac{EC \cdot AD}{AC} = \dfrac{\frac{18\sqrt{13}}{13} \cdot 6}{2\sqrt{13}} = \dfrac{54}{13} = 4\dfrac{2}{3}.$

Ответ: $4\frac{2}{3}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(За решение дополнительных задач ставится оценка или при наличии ошибок в решениях задач для самостоятельной работы засчитывается решение дополнительной задачи.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Что называют средним геометрическим (средним пропорциональным) двух отрезков?
2. Сформулируйте свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.
3. Сформулируйте утверждение о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

Домашнее задание

1. П. 65, вопросы 10, 11 (учебник, с. 159).
2. Решить задачи № 572 (а, в, д), 573, 574 (а, б).
3. Выполнить работу над ошибками, используя готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы (см. урок № 40).

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. $EF = 7$ см, $\angle BEF = 72°$.

2. $AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $AO : OA_1 = 2 : 1$ (рис. 7.101), следовательно, $AO = 8$, $OA_1 = 4$, $OB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Ответ: $OB = \sqrt{41}$.

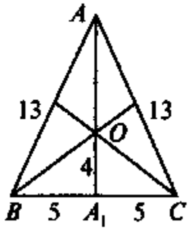


Рис. 7.101

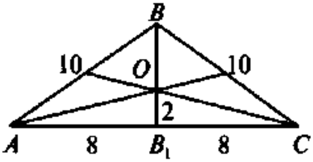


Рис. 7.102

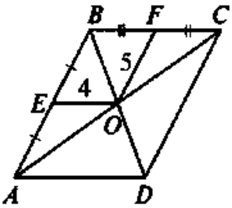


Рис. 7.103

Вариант 2

1. $AB = 16$ см, $\angle B = 46°$.

2. $BB_1 = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, $BO : OB_1 = 2 : 1$ (рис. 7.102), следовательно, $OB_1 = 2$. $AO = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Ответ: $2\sqrt{17}$.

II уровень сложности

Вариант 1

1. EO и OF – средние линии треугольника ABC (рис. 7.103), следовательно, $BC = 8$ см, $AB = 10$ см.

$P_{ABCD} = 36$ см.

Ответ: 36 см.

2. $BB_1 = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ см. $OB_1 = 8$ см (рис. 7.104), следовательно, $AO = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ см. $AA_1 = CC_1 = \frac{3}{2}\sqrt{113}$ см.

Ответ: 24 см, $\frac{3}{2}\sqrt{113}$ см, $\frac{3}{2}\sqrt{113}$ см.

Вариант 2

1. OM и ON – средние линии треугольника BCD (рис. 7.105), следовательно, $CD = 6$ см, $BC = 2 \cdot ON$, значит, $P_{ABCD} = 2 \cdot (CD + BC) = 2 \cdot (6 + 2 \cdot ON) = 28$, откуда $ON = 4$ см.

Ответ: 4 см.

2. $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $OB_1 = 4$ см. $AO = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ см, $AA_1 = CC_1 = 1{,}5\sqrt{41}$ см (рис. 7.106).

Ответ: 12 см, $1{,}5\sqrt{41}$ см, $1{,}5\sqrt{41}$ см.

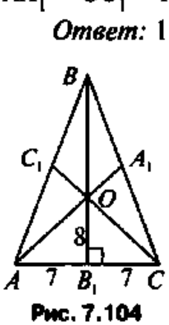


Рис. 7.104

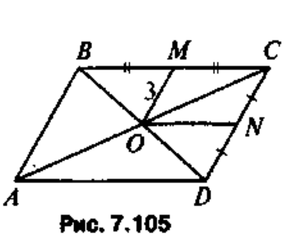


Рис. 7.105

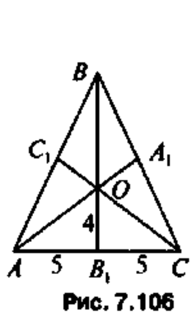


Рис. 7.106

III уровень сложности

Вариант 1

1. N – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 7.107), следовательно, $AP = PB = 6$ см, отсюда $AB = 12$ см, $BH = 6$ см, значит, $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16 \cdot 6 = 96$ см^2.

Ответ: 96 см^2.

2. $BB_1 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ см, следовательно, $OB_1 = 3$ см, $OB = 6$ см (рис. 7.108), $AO = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$ см.

$AB = 15$ см, значит, если $AH = x$, то $BH = 15 - x$, тогда $OH^2 = AO^2 - AH^2 = OB^2 - BH^2$, отсюда $153 - x^2 = 36 - (15 - x)^2$, $x = 11{,}4$, т. е. $AH = 11{,}4$ см, следовательно, $OH = \sqrt{153 - 11{,}4^2} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ см.

Ответ: 3 см; 4,8 см; 4,8 см.

Вариант 2

1. P – точка пересечения медиан треугольника BCD (рис. 7.109), следовательно, $BK = KC = 7$ см, отсюда $BC = AD = 14$ см. $AH = \dfrac{AB}{2} = 5$ см, следовательно, $BH = 5\sqrt{3}$ см. $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 70\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $70\sqrt{3}$ см^2.

2. $OB_1 = 5$ см (рис. 7.110), следовательно, $OB = 10$ см, отсюда $HB = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см.

$\Delta ABB_1 \sim \Delta OBH$, следовательно, $AB : OB = BB_1 : BH$, значит, $AB = 10 \cdot 15 : 6 = 25$ см.

$AB_1 = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см, отсюда $AC = 40$ см.

Ответ: 25 см, 25 см, 40 см.

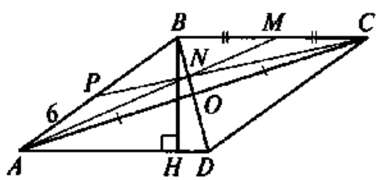


Рис. 7.107

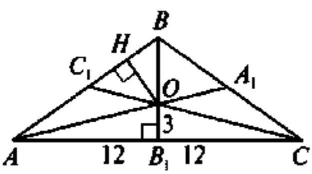


Рис. 7.108

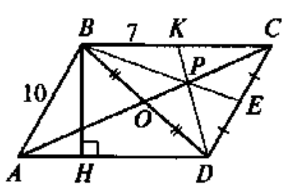


Рис. 7.109

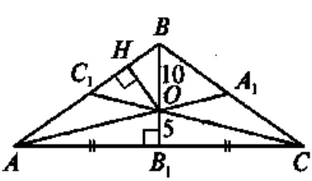


Рис. 7.110

Урок 42. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Основная дидактическая цель урока: совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика готовят доказательство свойств прямоугольного треугольника. Заслушать после решения задач по готовым чертежам.)

1) Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.

2) Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

3) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

2. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время теоретического опроса.)

I уровень сложности

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота треугольника, $AC = 5$ см, $CB = 10$ см. Найдите отношение площадей треугольников ACD и CDB.

2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $BE \perp AD$, $BE = 6$ см, $AE = 3$ см. Найдите площадь параллелограмма.

II уровень сложности

1. Диагонали ромба пересекаются в точке O, $AC : BD = 3 : 2$, $OE \perp AB$. Площадь треугольника AOE равна 27 см^2. Найдите площадь ромба.

2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = CB$, BD – биссектриса, $DE \perp AB$, $AE : BE = 4 : 9$, $BD + AC = 14$. Найдите периметр треугольника ABC.

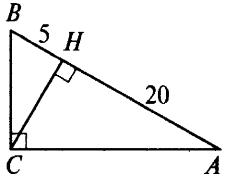


Рис. 7.111

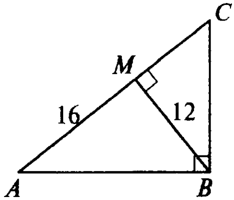


Рис. 7.112

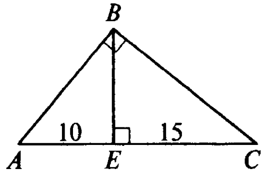


Рис. 7.113

III уровень сложности

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BE \perp AC$, $AE : CE = 1 : 3$. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

2. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $BE \perp AD$, $BC : AD = 1 : 2$, $BE : DE = 3 : 4$. Площадь треугольника ABE равна 18 см^2. Найдите площадь трапеции.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

3. Решение задач по готовым чертежам.

1) Рис. 7.111.

Найти: CH.

2) Рис. 7.112.

Найти: MC.

3) Рис. 7.113.

Найти: AB, BC.

4) Рис. 7.114.

Найти: x, y, z.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

III. Решение задач

1. Решить задачу № 576.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

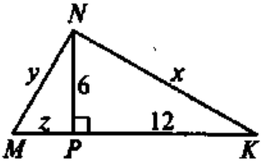


Рис. 7.114

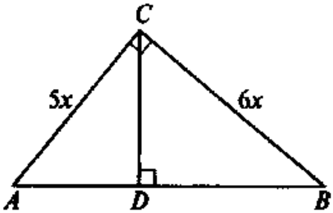


Рис. 7.115

Задача № 576

Решение: Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда $AC = 5x$, $BC = 6x$ (рис. 7.115).

Из ΔACD ($\angle D = 90°$) по теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 25x^2 - CD^2$.

Из ΔBCD ($\angle D = 90°$) по теореме Пифагора $BD^2 = CB^2 - CD^2 = 36x^2 - CD^2$.

$BD^2 - AD^2 = (36x^2 - CD^2) - (25x^2 - CD^2) = 11x^2$.

$BD^2 - AD^2 = (BD - AD)(BD + AD) = 11 \cdot AB$, так как BD на 11 см больше AD, $BD + AD = AB$.

$11x^2 = 11 \cdot AB$, отсюда $AB = x^2$.

Из ΔABC ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 25x^2 + 36x^2 = 61x^2$, отсюда $AB = x\sqrt{61}$; $x^2 = x\sqrt{61}$; $x = \sqrt{61}$; $AB = 61$ см.

Ответ: 61 см.

Наводящие вопросы.

– Пусть x – коэффициент пропорциональности. Чему равны катеты AC и BC?
– Как можно выразить через x AB?
– Чему равно AB?

2. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 69 (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

Рис. 7.116.

Найти: а) CH, AC, BC. б) $S_{ACH} : S_{BCH}$.

Вариант 2

Рис. 7.117.

Найти: а) BH, AB, BC. б) $S_{ABH} : S_{CBH}$.

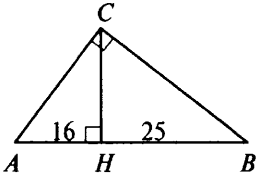


Рис. 7.116

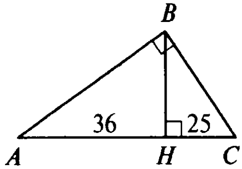


Рис. 7.117

II уровень сложности

Вариант 1

Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна 6 см и делит гипотенузу на отрезки, один из которых больше другого на 5 см. Найдите стороны треугольника. В каком отношении данная высота делит площадь треугольника?

Вариант 2

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CD так, что длина отрезка BD на 4 см больше длины отрезка CD, $AD = 9$ см. Найдите стороны треугольника ABC. В каком отношении CD делит площадь треугольника ABC?

III уровень сложности

Вариант 1

В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH так, что $AC = 2$ см, $BH = 3$ см. Найдите CB, CH, AH. В каком отношении CH делит площадь треугольника ABC?

Вариант 2

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота BK так, что $AK = 5$ см, $BC = \sqrt{6}$ см. Найдите BK, KC, AB. В каком отношении BK делит площадь треугольника ABC?

Дополнительная задача

Биссектриса острого угла CDA трапеции $ABCD$ пересекает сторону AB в точке K. Из точки K проведен перпендикуляр KE к стороне CD так, что $CE = 9$ см, $DE = 16$ см. Найдите KE и стороны трапеции, если $\angle A = 90°$, K – середина AB.

Ответ: $KE = 12$ см, $AB = 24$ см, $BC = 9$ см, $CD = 25$ см, $AD = 16$ см.

(Оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за самостоятельную работу и оценки на этапе актуализации знаний учащихся.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

2. Сформулируйте утверждение о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

Домашнее задание

Решить задачи № 575, 577, 578 (устно), 579.

Урок 43. Измерительные работы на местности

Основные дидактические цели урока: показать применение подобия треугольников в измерительных работах на местности; совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности.

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

а) $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = 20$; $AC = \sqrt{AH \cdot AB} = 4\sqrt{41}$;
$BC = \sqrt{BH \cdot AB} = 5\sqrt{41}$.

б) $S_{ACH} : S_{BCH} = 16 : 25$.

Вариант 2

а) $BH = \sqrt{AH \cdot BH} = 30$; $AB = \sqrt{AH \cdot AC} = 6\sqrt{61}$;
$BC = \sqrt{CH \cdot AC} = 5\sqrt{61}$.

б) $S_{ABH} : S_{CBH} = 36 : 25$.

II уровень сложности

Вариант 1

Рис. 7.118.

$\sqrt{x \cdot (x+5)} = 6$, отсюда $x = 4$. $AC = 13$ см; $AB = 3\sqrt{13}$ см; $BC = 2\sqrt{13}$ см; $S_{ABH} : S_{BCH} = 9 : 4$.

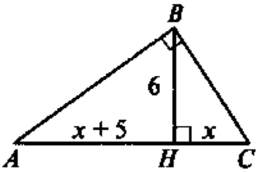


Рис. 7.118

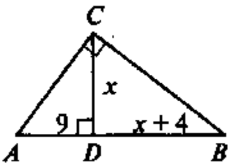


Рис. 7.119

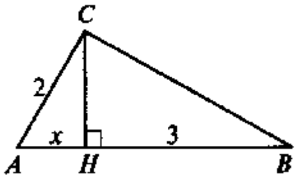


Рис. 7.120

Вариант 2

Рис. 7.119.

$\sqrt{9 \cdot (x+4)} = x$, отсюда $x = 12$. $AB = 25$ см; $AC = 15$ см; $BC = 20$ см; $S_{ACD} : S_{BCD} = 9 : 16$.

III уровень сложности

Вариант 1

Рис. 7.120.

$x^2 + \sqrt{3 \cdot x^2} = 2^2$, отсюда $x = 1$. $CH = \sqrt{3}$см; $CB = 2\sqrt{3}$см; $AH = 1$ см; $S_{ACH} : S_{BCH} = 1 : 3$.

Вариант 2

$x^2 + \sqrt{5 \cdot x^2} = \sqrt{6^2}$, отсюда $x = 1$. $KC = 1$ см; $BK = 5$ см; $AB = \sqrt{30}$см; $S_{ABK} : S_{CBK} = 5 : 1$.

III. Проверка домашнего задания

Доказать теорему Пифагора с помощью теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

(Наиболее подготовленный ученик готовит доказательство теоремы у доски. Заслушать после проверки задачи № 579.)

Задача № 579

Решение: $\Delta BAC \sim \Delta BA_1C_1$ (рис. 7.121) по двум углам ($\angle ACB = \angle A_1C_1B = 90°$, $\angle B \neq 90°$).

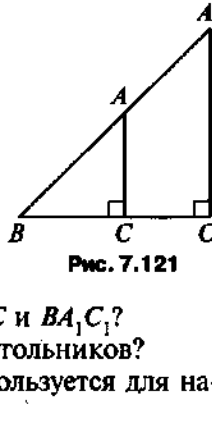


Рис. 7.121

Тогда

$$\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow A_1C_1 = \frac{BC_1 \cdot AC}{BC} = 3{,}15 \text{ м}.$$

Ответ: 3,15 м.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольниках BAC и BA_1C_1?

– Что можно сказать о сторонах этих треугольников?

– Пропорциональность каких сторон используется для нахождения отрезка A_1C_1?

IV. Изучение нового материала

1. Прочитать текст «Определение расстояния до недоступной точки» (учебник, с. 149, 150).

2. Решить задачу (работа в группах).

Используя задачу № 583 (учебник, с. 153, рис. 204), составьте план действий для определения ширины реки.

(Заслушать и обсудить различные варианты ответов.)

Возможный план:

1) На местности выбрать точку A и точку B_1 на берегу реки так, чтобы AB_1 было перпендикулярно берегу. B – точка на противоположном берегу.

2) На берегу реки выбрать точку C, отличную от B_1.

3) Измерить углы B_1AC и ACB.

4) На листе бумаги выполнить рисунок в некотором масштабе и провести прямую B_1C_1 параллельно BC.

5) Вычислить AB, а затем B_1B.

$AB : AC = AB_1 : AC_1$, следовательно, $AB = AC \cdot AB_1 : AC_1$, $B_1B = AB - AB_1$.

Решить задачу № 583 с учетом ее данных.

V. Решение задач

1. Решить задачу № 582 (работа в парах).

(Учащиеся самостоятельно решают задачу. Через 3–5 мин учащиеся обсуждают решение задачи и исправляют ошибки.)

Задача № 582

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (по построению). Тогда $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, следовательно $AB = \dfrac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{4200 \cdot 7{,}2}{6{,}3} = 48$ м.

Ответ: 48 м.

2. Решить задачи (*Д.М.*).

I уровень сложности

Задача С-20 (с. 16, вариант 2, № 1)

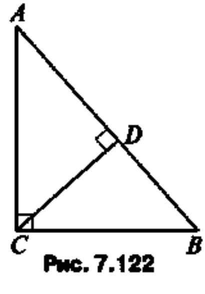


Рис. 7.122

Решение: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по двум углам (рис. 7.122). Тогда $k = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2}{3}$, следовательно,

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ответ: 4 : 9.

Задача С-20 (с. 16, вариант 2, № 2)

Решение: Из ΔBCD (рис. 7.123) по теореме Пифагора $BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$.

$\Delta BCD \sim \Delta DBA$ по двум углам. Тогда $\dfrac{BC}{DB} = \dfrac{CD}{BA} = \dfrac{BD}{DA}$, следовательно, $\dfrac{3}{3\sqrt{5}} = \dfrac{6}{BA}$, значит, $BA = \dfrac{3\sqrt{5} \cdot 6}{3} = 6\sqrt{5}$.

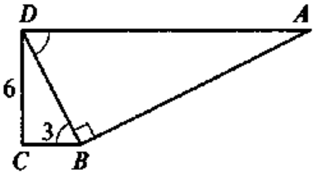


Рис. 7.123

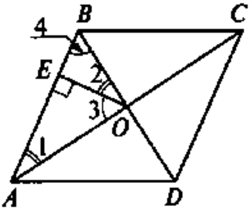


Рис. 7.124

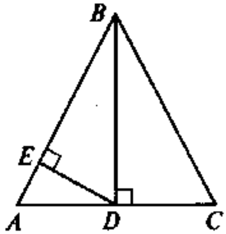


Рис. 7.125

$S_{DBA} = \frac{1}{2} DB \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 45.$

$S_{DBC} = \frac{1}{2} CB \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$

$S_{ABCD} = S_{DBA} + S_{BDC} = 45 + 9 = 54.$

Ответ: 54.

II уровень сложности

Задача С-20 (с. 36, вариант 4, № 1)

Решение: Так как $\frac{AC}{BD} = \frac{3}{2}$, то $\frac{AO}{BO} = \frac{3}{2}$ (рис. 7.124).

$\Delta BOE \sim \Delta OAE$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$).

Тогда $\frac{S_{BOE}}{S_{AOE}} = k^2 = \frac{4}{9}$. Так как $S_{AOE} = 27$ см^2, то $S_{BOE} = 12$ см^2.

Отсюда $S_{AOB} = 27 + 12 = 39$ см^2, следовательно, $S_{ABCD} = 4 \cdot 39 = 156$ см^2.

Ответ: 156 см^2.

Задача С-20 (с. 36, вариант 4, № 2)

Решение: $\Delta AED \sim \Delta ADB$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AED = \angle ADB = 90°$) (рис. 7.125), следовательно, $\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AB}$.

Если $AE = x$, то $BE = \frac{9}{4}x$. Так как $\frac{AE}{BE} = \frac{4}{9}$, то

$AB = AE + BE = x + \frac{9}{4}x = \frac{13}{4}x.$

Так как $AD = \sqrt{AE \cdot AB}$, то $AD^2 = AE \cdot AB = x \cdot \frac{13}{4}x$, следовательно, $AD = \frac{x}{2}\sqrt{13}.$

$AD = DC$, отсюда $AC = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{13} = \sqrt{13}x.$

$BD^2 = AB^2 - AD^2 = \left(\frac{13}{4}x\right)^2 - \frac{x^2}{4} \cdot 13 = \frac{117}{16}x^2$, следовательно, $BD = \frac{x}{4}\sqrt{117}.$

$BD + AC = 14$, тогда $\frac{x}{4}\sqrt{117} + \sqrt{13}x = 14$.

$$x = \frac{56}{\sqrt{117}+4\sqrt{13}} = \frac{56}{3\sqrt{13}+4\sqrt{13}} = \frac{56}{7\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}};$$

$$AB = \frac{13}{4}\cdot\frac{8}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}, AC = \sqrt{13}\cdot\frac{8}{\sqrt{13}} = 8.$$

$P_{ABC} = AC + AB + BC = 8 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 4\sqrt{13} + 8.$

Ответ: $4\sqrt{13} + 8$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
2. Чему равно отношение периметров, площадей подобных треугольников?
3. Сформулируйте свойство биссектрисы угла.
4. Сформулируйте свойство медиан треугольника.
5. Сформулируйте свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.
6. Сформулируйте утверждение о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

Домашнее задание

1. П. 66 (с. 149–150), вопрос 13 (учебник, с. 159).
2. Решить задачи № 580, 581.
3. Решить дополнительные задачи. I уровень сложности: (*Д.М.:* С-20, с. 36, вариант 4); II уровень сложности: (*Д.М.:* С-20, с. 55, вариант 6.).

Урок 44. Решение задач на построение методом подобия

Основная дидактическая цель урока: выработать у учащихся навыки использования теорем подобных треугольников при решении задач на построение.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Разобрать задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

2. Решить задачи (устно).

1) *Дано:* $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ (рис. 7.126).

Найти: A_1A_2, A_2A_3.

Ответ: $A_1A_2 = 1{,}5$; $A_2A_3 = 2{,}5$.

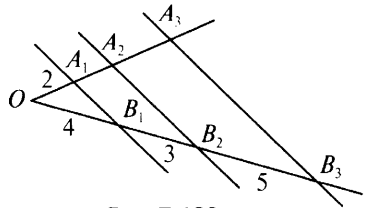


Рис. 7.126

2) *Дано:* $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel A_5B_5$, $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = 3$. $OA_5 = 10$.

Найти: OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5.

3. Решить задачи на построение.

1) Постройте медиану AM треугольника ABC.

2) Постройте биссектрису MA треугольника MNK.

3) Постройте высоту PK треугольника PST.

4) Постройте прямую, параллельную стороне AB треугольника ABC и проходящую через точку C.

III. Решение задач на построение методом подобия треугольников

1. Решить задачу № 584 и ответить на вопрос «Почему точка X делит отрезок AB на отрезки AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2?».

(Учащиеся самостоятельно читают решение задачи по учебнику, затем заслушивают различные варианты ответов на поставленный вопрос. Наиболее подготовленный ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

2. Решить задачу № 585 (а) (работа в парах).

Задача № 585 (а)

План построения:

а) Построить луч AD и отложить на нем отрезки AK и KD так, что $AK : KD = 2 : 5$ (например, $AK = 2$ см, $KD = 5$ см).

б) Провести прямую BD.

в) Провести прямую $k \parallel BD$ ($F \in AB$). $AF : FB = AK : KD = 2 : 5$.

3. Прочитать задачу № 3 (с. 148 учебника) (самостоятельно).

4. Решить задачи № 586, 589 (самостоятельно).

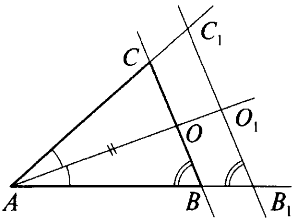
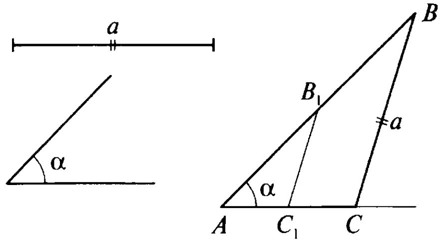


Рис. 7.127



а **б**

Рис. 7.128

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь. В конце урока учащиеся сдают тетради на проверку.)

Задача № 586

Построение (рис. 7.127):

1) Построить угол, равный данному ($\angle A$).

2) Построить биссектрису данного угла и отложить на ней отрезок, равный (AO) биссектрисе данного треугольника.

3) Построить угол, равный второму углу ($\angle B_1$) от произвольной точки на одной из сторон первого угла.

4) Через точку O провести прямую, параллельную O_1B_1.

5) Прямая OB пересекается со второй стороной угла в точке C.

6) ΔABC – искомый.

Задача № 589

Дано: $\angle A = \alpha$, $BC = a$, $AB : AC = 2 : 1$ (рис. 7.128, а).

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 7.128, б):

1) Построить $\angle A = \alpha$.

2) Построить отрезки AC_1 и AB_1 на сторонах $\angle A$ так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$.

3) Отложить отрезок $AB = \dfrac{a}{B_1C_1} \cdot AB_1$, $AC = \dfrac{a}{B_1C_1} \cdot AC_1$.

4) ΔABC – искомый.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» не ставится.

IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Как разделить отрезок на n равных частей?
2. Как разделить отрезок в данном отношении?

Домашнее задание

Решить задачи № 585 (б, в), 587, 588, 590.

Урок 45. Решение задач на построение методом подобных треугольников

Основная дидактическая цель урока: совершенствовать навыки решения задач методом подобия.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 588, 590. Два ученика заранее готовят решение на доске. Учащиеся слушают и вносят свои исправления, дополнения в решение.)

Задача № 588

Дано: $\angle A = \alpha$, $AM = a$ (медиана), $AB : AC = 2 : 3$ (рис. 7.129, а).

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 7.129, б):

1) $\angle A = \alpha$.

2) Построить на сторонах $\angle A$ отрезки AB_1 и AC_1 так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 3$ ($AB_1 = 2$ см, $AC_1 = 3$ см).

3) Построить середину B_1C_1 – точку K. AK – медиана ΔAB_1C_1.

4) На луче AK отложить отрезок AM, равный a.

5) Через точку M провести прямую $BC \parallel B_1C_1$.

6) ΔABC – искомый.

Доказательство: $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$, так как $B_1C_1 \parallel BC$), $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, следовательно, $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$.

Так как $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{2}{3}$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$.

K – середина B_1C_1, отсюда M – середина BC.

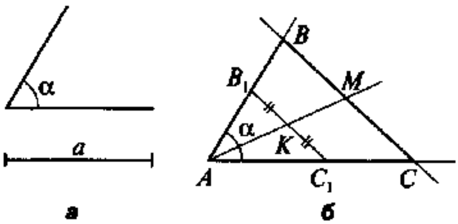


Рис. 7.129

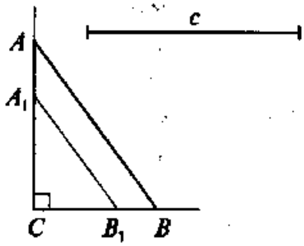


Рис. 7.130

Задача № 590

Дано: ΔABC – прямоугольный, $AC : BC = m : n$, c – гипотенуза, $\angle C = 90°$.

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 7.130):

1) $\angle C = 90°$.

2) На сторонах угла C построить отрезки CA_1 и CB_1 так, что $CA_1 : CB_1 = m : n$.

3) A_1B_1 – гипотенуза ΔA_1CB_1.

4) Построить отрезки $CA = \frac{c}{A_1B_1} \cdot CA_1$ и $CB = \frac{c}{A_1B_1} \cdot CB_1$.

5) ΔABC – искомый.

III. Решение задач

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы идет обсуждение, выбор наиболее рационального способа решения.)

1. Задача № 70 (рабочая тетрадь).

2. Построить треугольник ABC по углу A, отношению сторон $AB : AC = 2 : 1$ и расстоянию от точки пересечения медиан до вершины C.

Решение:

Дано: $\angle A = \alpha$, O – точка пересечения медиан, ΔABC, $OC = m$ (рис. 7.131). $AB : AC = 2 : 1$.

Построить: ΔABC.

Построение:

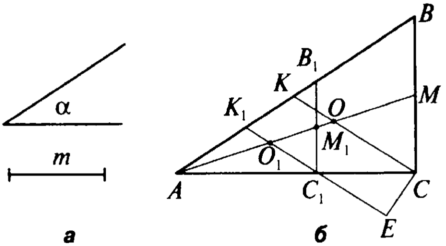
1) Построить угол A, равный α.

2) На сторонах угла A отложить отрезки AC_1 и AB_1 так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$.

3) Построить точку пересечения медиан треугольника AB_1C_1 – точку O_1.

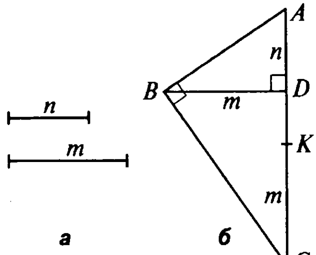
4) На луче O_1C_1 отложить отрезок C_1E, равный m.

5) Построить прямую EC, параллельную медиане AM_1 треугольника AB_1C_1 $C = EC \cap AC_1$.



а б

Рис. 7.131



а б

Рис. 7.132

6) Через точку C провести прямую CB, параллельную C_1B_1, $CB \cap AB_1 = B$.

7) ΔABC – искомый.

Доказательство: В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$. $AB : BC = 2 : 1$, так как $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ по двум углам, следовательно, так как $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$ по построению, то $AB : AC = 2 : 1$. O – точка пересечения медиан треугольника ABC, так как, если $B_1M_1 = M_1C_1$, то $BM = MC$ ($\Delta AB_1M_1 \sim \Delta ABM$, $\Delta AM_1C_1 \sim \Delta AMC$). $OC = m$, так как $C_1E = m$, а O_1OCE параллелограмм по построению. Треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи, следовательно, треугольник ABC – искомый.

3. Постройте отрезок $a = \dfrac{(m-n)\cdot m}{n}$, если отрезки m и n известны.

Решение: $\dfrac{(m-n)\cdot m}{n} = \dfrac{m^2 - m\cdot n}{n} = \dfrac{m^2}{n} - m$ (рис. 7.132).

В прямоугольном треугольнике ABC BD – высота, проведенная из вершины прямого угла, поэтому $BD = \sqrt{CD \cdot AD}$, значит, $BD^2 = CD \cdot AD$, следовательно, $CD = BD^2 : AD = m^2 : n$. $DK = CD - CK$.

Если $CK = m$, то $DK = \dfrac{m^2}{n} - m$.

Построение:

1) Построить ΔABD, в котором $\angle D = 90°$, $BD = m$, $AD = n$.

2) Провести прямую BC так, что $BC \cap AD = C$.

3) На луче CA отложить отрезок CK, равный m.

4) DK – искомый отрезок.

Задача не имеет решения, если $m < n$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок на семь равных частей.

2. Даны отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 и угол D. Постройте ΔABC так, чтобы $\angle A = \angle D$, $M_1N_1 : AB = M_2N_2 : AC$, $AC = M_3N_3$.

3. Постройте отрезок $x = \sqrt{a \cdot b}$, если даны отрезки a и b.

Вариант 2

1. Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок на пять равных частей.

2. Даны отрезки O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3 и угол E. Постройте треугольник ABC так, чтобы $\angle B = \angle E$, $BA : O_1P_1 = BC : O_2P_2$, $BA = O_3P_3$.

3. Даны отрезки c и d. Постройте отрезок x такой, что $x^2 = c \cdot d$.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки разделите его в отношении 2 : 3.

2. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

3. Даны отрезки m и n. Постройте отрезок y такой, что $y = n^2 : m + n$.

Вариант 2

1. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки разделите его в отношении 4 : 5.

2. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе угла при основании.

3. Даны отрезки k и h. Постройте отрезок y такой, что $y = h^2 : k + k$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Даны отрезки x, y, z. Постройте отрезок t такой, что $x \cdot t = y \cdot z$.

2. Постройте трапецию по острому углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла, если известно, что основания трапеции относятся как 3 : 5, а боковая сторона, образующая данный угол, равна меньшему основанию.

3. Даны отрезки m и n. Постройте отрезок k такой, что $k = \dfrac{n \cdot (m + n)}{m}$.

Вариант 2

1. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок d такой, что $a : c = b : d$.

2. Постройте трапецию по острому углу и диагонали, являющейся биссектрисой этого угла, если известно, что основания трапеции относятся как 2 : 3.

3. Даны отрезки k и p. Постройте отрезок m такой, что $m = \dfrac{(k-p)\cdot(k+p)}{p}$.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Как разделить отрезок на n равных частей?
2. Как разделить отрезок в данном отношении?

Домашнее задание

Решить задачи № 606, 607, 628, 629.

Урок 46. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Основные дидактические цели урока: ввести понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника; ознакомить учащихся с основным тригонометрическим тождеством и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 606, 607. Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 606

Найти: $OK : ON$.

Решение: Так как NK – биссектриса, то $\dfrac{NM}{MK} = \dfrac{NP}{PK} \Rightarrow \dfrac{5}{MK} = \dfrac{3}{PK}$ (рис. 7.133).

$$MP = 7 \Rightarrow PK = 7 - MK \Rightarrow \frac{5}{MK} = \frac{3}{7 - MK} \Rightarrow MK = 4\frac{3}{8} \text{ см.}$$

Так как MD – биссектриса, то в ΔMNK:

$$\frac{MK}{OK} = \frac{MN}{ON} \Rightarrow 4\frac{3}{8} : OK = 5 : ON \Rightarrow OK : ON = 4\frac{3}{8} : 5 = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $OK : ON = 7 : 8$.

Наводящие вопросы.

– Сформулируйте свойство биссектрисы угла треугольника.

– Какое отношение можно составить из того, что NK – биссектриса ΔMNP?

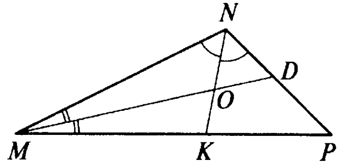


Рис. 7.133

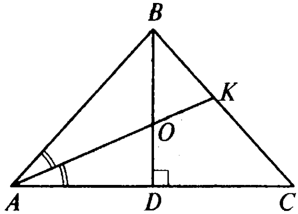


Рис. 7.134

– Как, используя свойство биссектрисы угла треугольника, можно найти отношение $OK : ON$? Какой треугольник для этого удобнее использовать?

Задача № 607

Решение: Так как по условию задачи $AC : AB = 4 : 3$, BD – высота (рис. 7.134), а следовательно, и медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, то $AD = \frac{1}{2} \cdot AC$, значит, $AD : AB = 2 : 3$.

Так как AK – биссектриса $\angle BAC$, то AO – биссектриса в ΔABD и $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD}$. Так как $AD : AB = 2 : 3$, $BD = 30$ см, $BO + OD = BD$, то $\frac{3}{2} = \frac{BO}{30 - BO}$. Тогда $3 \cdot (30 - BO) = 2 \cdot BO$; $BO = 18$ см, следовательно, $OD = 30 - 18 = 12$ см.

Ответ: $BO = 18$ см, $OD = 12$ см.

Наводящие вопросы.

– Какой треугольник удобнее использовать для нахождения отношения $BO : OD$?

– Чему равно отношение $AD : AB$? Объясните.

– Сформулируйте свойство биссектрисы AO треугольника ABD. Как его можно использовать для решения данной задачи?

– Как взаимосвязаны отрезки BO и OD? Составьте уравнение и найдите BO (или OD).

2. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие катетов, прилежащих и противолежащих углу.

2. Ввести понятия синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника, их обозначения.

Определения:

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 7.135) и запись:

AC – катет, прилежащий $\angle A$.

BC – катет, противолежащий $\angle A$.

$\sin A = BC : AB$, $\cos A = AC : AB$, $\operatorname{tg} A = BC : AC$.

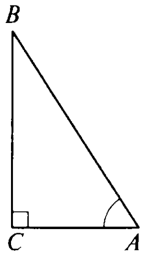


Рис. 7.135

3. Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса с помощью микрокалькулятора и четырехзначных математических таблиц Брадиса.

4. Вывести формулы:

а) $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$;

б) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

а) Так как $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, то

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A.$$

Итак, $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

б) $$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

(В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$.)

Итак, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Это равенство называют ***основным тригонометрическим тождеством.***

5. Решить задачу (работа в парах).

Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

Дано: ΔABC, ΔMNK, $\angle C = \angle M = 90°$, $\angle A = \angle K$.

Доказать: $\sin A = \sin K$, $\cos A = \cos K$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} K$.

Доказательство: $\Delta ABC \sim \Delta KNM$ по двум углам ($\angle C = \angle M = 90^\circ$, $\angle A = \angle K$) $\Rightarrow \frac{AB}{KN} = \frac{BC}{NM} = \frac{AC}{KM}$.

Так как $\frac{BC}{NM} = \frac{AB}{KN}$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{NM}{KN}$, $\frac{BC}{AB} = \sin A$, $\frac{NM}{KN} = \sin K$, отсюда $\sin A = \sin K$.

Так как $\frac{AC}{KM} = \frac{AB}{KN}$, то $\frac{AC}{AB} = \frac{KM}{KN}$, $\frac{AC}{AB} = \cos A$, $\frac{KM}{KN} = \cos K$, отсюда $\cos A = \cos K$.

Так как $\sin A = \sin K$, $\cos A = \cos K$, то $\operatorname{tg} A = \sin A : \cos A = \sin K : \cos K = \operatorname{tg} K$.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольниках ABC и MNK?
– Что можно сказать об отношениях их сходственных сторон?
– Примените основное свойство пропорции к равенству $\frac{BC}{NM} = \frac{AB}{KN}\left(\frac{AC}{KM} = \frac{AB}{KN}\right)$.
– Что можно сказать об отношении противолежащего катета к гипотенузе (прилежащего катета к гипотенузе)?
– Чем можно заменить отношение $\frac{BC}{AB}$ $\left(\frac{NM}{KN}; \frac{AC}{AB}; \frac{KM}{KN}\right)$?
– Выразите $\operatorname{tg} A$ через $\sin A$ и $\cos A$ ($\operatorname{tg} K$ через $\sin K$ и $\cos K$).
– Равны ли $\operatorname{tg} K$ и $\operatorname{tg} A$?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 71, 72.

(Учащиеся решают задачу № 71 (устно), затем самостоятельно решают задачу № 72, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решить задачи № 591 (а, б), 592 (а, в, е), 593 (а, б) (самостоятельно).

Задача № 591 (а)

Краткое решение: $BC = 8$, $AB = 17 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $AC = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$;

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{8}$.

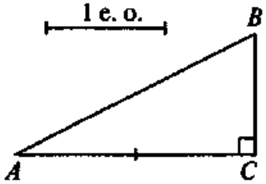


Рис. 7.136

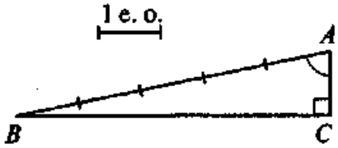


Рис. 7.137

Задача № 591 (б)

Краткое решение: $BC = 21$, $AC = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{21^2 - 20^2} = 29$.

Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20}$;

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{21}$.

Задача № 592 (а)

Краткое решение: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ противолежащий катет относится к прилежащему как $1 : 2 \Rightarrow$ нужно построить ΔABC с $\angle C = 90°$, $BC = 1$ е. о.; $AC = 2$ е. о. $\Rightarrow \angle A$ – искомый (рис. 7.136).

Задача № 592 (в)

Краткое решение: $\cos\alpha = 0{,}2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ отношение прилежащего катета к гипотенузе равно $1 : 5$. $AC = 1$ е. о., $AB = 5$ е. о. $\angle A$ – искомый (рис. 7.137).

Задача № 592 (е)

Краткое решение: $\sin\alpha = 0{,}4 = 2 : 5 \Rightarrow$ в ΔABC ($\angle C = 90°$), $BC = 2$ е. о., $AB = 5$ е. о. $\angle A$ – искомый (рис. 7.138).

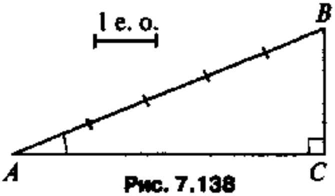


Рис. 7.138

Задача № 593 (а)

Краткое решение: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Отсюда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

Задача № 593 (б)

Краткое решение: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Отсюда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены шесть-семь задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Что называется синусом (косинусом, тангенсом) острого угла прямоугольного треугольника?
2. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
3. Запишите формулу, выражающую тангенс угла через синус и косинус.

Домашнее задание

1. П. 68, вопросы 15–17 (учебник, с. 159).
2. Решить задачу № 73 (рабочая тетрадь).
3. Решить задачи № 591 (в, г), 592 (б, г, е), 593 (в, г).

Урок 47. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Основные дидактические цели урока: научить учащихся вычислять значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°; сформировать навыки решения задач по теме.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 73 (рабочая тетрадь). Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки.)

2. Решение задач по готовым чертежам (устно).

1) Рис. 7.139.

Найти: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$.

2) *Дано: ABCD* – параллелограмм (рис. 7.140).

Найти: S_{ABCD}.

3) Рис. 7.141.

Найти: S_{ABC}.

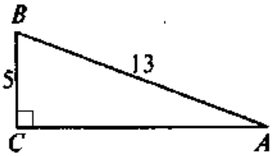


Рис. 7.139

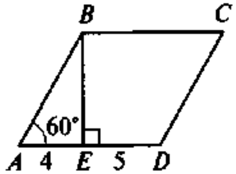


Рис. 7.140

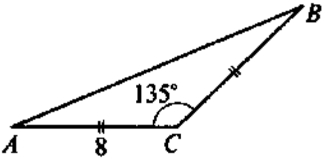


Рис. 7.141

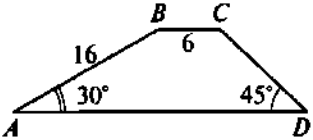


Рис. 7.142

4) *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.142).

Найти: AD.

3. Работа по индивидуальным карточкам.

(3–6 учеников работают по карточкам во время решения задач по готовым чертежам.)

I уровень сложности

1. В треугольнике MNK $\angle K = 90°$, $MN = 13$ см, $NK = 5$ см. Найдите синусы, косинусы и тангенсы углов M и N.

2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}3$.

II уровень сложности

1. Постройте угол A, равный α, такой, что: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание равно 12 см, а высота, проведенная к ней, равна 8 см. Найдите синусы, косинусы и тангенсы углов при основании.

III уровень сложности

1. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, что $\sin A = 0{,}6$; $AB : BC = 1 : 2$.

2. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 9$ см, $AD = 21$ см, $AB = 10$ см. Найдите синус, косинус и тангенс угла D.

III. Работа по теме урока

1. Решить задачи (работа в группах с последующим обсуждением решения).

1) В ΔABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (рис. 7.143). Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

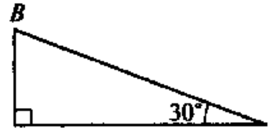


Рис. 7.143

(Указания учащимся, испытывающим затруднения при решении задач.)

а) Примите BC за x и найдите остальные стороны ΔABC.

б) Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

в) Найдите еще один способ для вычисления $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 45°$. Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

(После обсуждения решения задач учащиеся оценивают работу каждого члена группы.)

2. Заполнить таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45°, 60° (самостоятельно).

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 74 (устно).

2) Решить задачу № 75 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

2. Решить задачи № 594, 596 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 594

Краткое решение:

а) $\sin\beta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = AC : \sin\beta = b : \sin\beta$ (рис. 7.144).

$\angle A + \angle B = 90° \Rightarrow \angle A = 90° - \beta$.

$\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = AC : \operatorname{tg}\beta = b : \operatorname{tg}\beta$.

б) если $b = 10$ см, $\beta = 50°$, то $AB = 10 : \sin 50° \approx 10 : 0{,}766 = 13{,}0548$, $\angle A = 90° - 50° = 40°$.

$BC = 10 : \operatorname{tg} 50° \approx 10 : 1{,}1918 \approx 8{,}39$.

Ответ: а) $AB = b \cdot \sin\beta$, $BC = b : \operatorname{tg}\beta$, $\angle A = 90° - \beta$; б) $AB \approx 13{,}05$ см, $BC \approx 8{,}39$ см, $\angle A = 40°$.

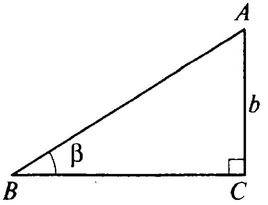


Рис. 7.144

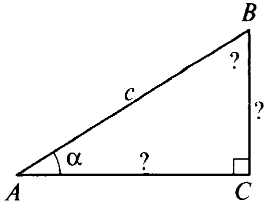


Рис. 7.145

Вопросы для обсуждения.

– Как найти острый угол прямоугольного треугольника, если другой острый угол равен β?

– Какая связь существует между катетом, противолежащим ему углом и гипотенузой?

– Как взаимосвязаны два катета прямоугольного треугольника и один из его острых углов?

– Как, используя четырехзначные таблицы Брадиса, найти $\sin 50°$, $\operatorname{tg} 50°$.

Задача № 596

Краткое решение: Если $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 90° - \alpha$ (рис. 7.145). $\sin\alpha = BC : AB \Rightarrow BC = AB \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha$. $\cos\alpha = AC : AB \Rightarrow AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$. Если $c = 24$ см, $\alpha = 35°$, то $\angle B = 55°$, $BC = 24 \cdot \sin 35° \approx 24 \cdot 0{,}5736 = 13{,}7664$; $AC = 24 \cdot \cos 35° \approx 24 \times \times 0{,}8192 = 19{,}6608$.

Ответ: $\angle B = 90° - \alpha = 55°$; $BC = c \cdot \sin\alpha \approx 13{,}7664$; $AC = = c \cdot \cos\alpha \approx 19{,}6608$.

Вопросы для обсуждения.

– Каким соотношением связаны между собой гипотенуза, катет и острый угол прямоугольного треугольника?

– Как найти острый угол прямоугольного треугольника по известному второму острому углу?

(В конце урока работа учащихся оценивается, при этом учитывается работа учащихся в группах.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

– Чему равны синус, косинус и тангенс угла 30° (45°, 60°)?

Домашнее задание

1. П. 69, вопрос 18 (учебник, с. 159).
2. Решить задачу № 76 (рабочая тетрадь).
3. Решить задачи № 595, 597, 598.
4. Решить дополнительные задачи.

1) В прямоугольной трапеции основания равны 6 см и 11 см, меньшая боковая сторона равна 4 см. Найдите синус, косинус и тангенс острого угла трапеции.

2) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OD = 10$ см. Из точки D на отрезок OB опущен перпендикуляр DE ($E \cap OB$), $OE = 6$ см. Найдите угол DOE.

3) Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 12 см, диагональ BD перпендикулярна стороне AB и равна 7 см. Найдите углы параллелограмма.

Урок 48. Решение задач по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Основная дидактическая цель урока: совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика готовят решение у доски. Заслушать после проверки домашнего задания.)

1) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 30°.

2) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 60°.

3) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 45°.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 76 (устно), № 598. Один ученик заранее готовит решение на доске.)

3. Решение задач по готовым чертежам.

I уровень сложности (устно с обсуждением решения).

1. Рис. 7.146.

Найти: $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

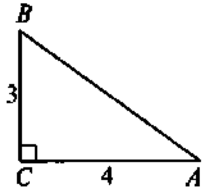


Рис. 7.146

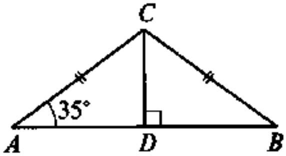


Рис. 7.147

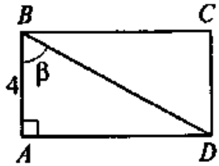


Рис. 7.148

2. *Дано:* $AB = 8$ (рис. 7.147).
Найти: S_{ABC}.
3. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 7.148).
Найти: AD, AC.
4. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.149).
Найти: AD, CD, S_{ABCD}.
5. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.150).
Найти: $\angle A = \angle B$.
6. Рис. 7.151.
Найти: AC.
II уровень сложности (самостоятельно).
1. *Дано:* $ABCD$ – равнобедренная трапеция (рис. 7.152).
Найти: S_{ABCD}.
2. Рис. 7.153.
Найти: AD, AC.
3. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.154).
Найти: AD, S_{ABCD}.
4. *Дано:* $\cos B = \frac{1}{3}$, $AB = 4$ (рис. 7.155).
Найти: HK.

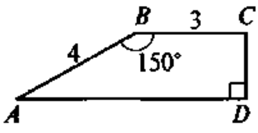


Рис. 7.149

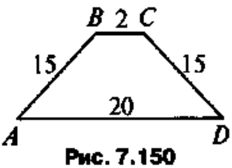


Рис. 7.150

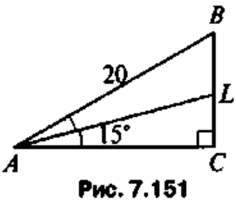


Рис. 7.151

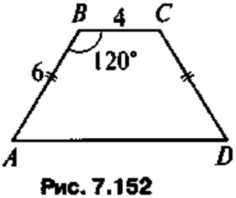


Рис. 7.152

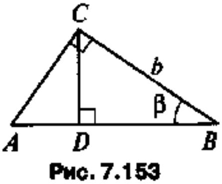


Рис. 7.153

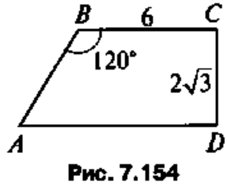


Рис. 7.154

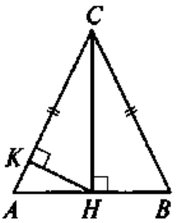


Рис. 7.155

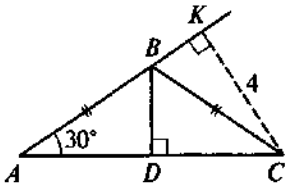


Рис. 7.156

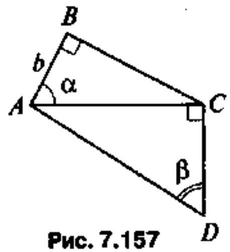


Рис. 7.157

5. Рис. 7.156.
Найти: BD.
6. Рис. 7.157.
Найти: AD.
Ответы к задачам II уровня сложности:
1. $S_{ABCD} = 21\sqrt{3}$.
2. $AD = b \cdot \text{tg}\beta \cdot \sin\beta$; $AC = b \cdot \text{tg}\beta$.
3. $AD = 8$; $S_{ABCD} = 14\sqrt{3}$.
4. $HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
5. $BD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
6. $AD = \dfrac{b \cdot \cos\alpha}{\sin\beta}$.

(После окончания самостоятельного решения задач II уровня сложности и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две-три задач;
- оценка «2» – не ставится.

III. Решение задач

Решить задачи № 600, 603 (работа в парах с последующим обсуждением решения.)

Задача № 600

Решение: Насыпь шоссейной дороги в разрезе имеет форму равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 7.158), в которой $BC = 60$ м, $BH = 12$ м, $\angle A = \angle D = 60°$.

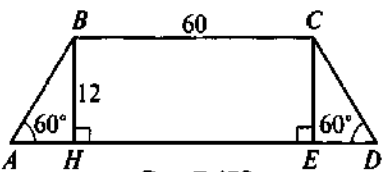


Рис. 7.158

В ΔABH ($\angle H = 90°$) $\operatorname{tg} A = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{BH}{\operatorname{tg} 60°} = 4\sqrt{3}$ м.

$\Delta ABH = \Delta DCE$, следовательно, $DE = 4\sqrt{3}$ м.

$HBCE$ – прямоугольник, отсюда $HE = 60$ м.

$AD = 2 \cdot AH + HE = 60 + 8\sqrt{3}$ м $\approx 73{,}86$ м.

Ответ: $\approx 73{,}86$ м.

Вопросы для обсуждения.

– Какую форму имеет насыпь шоссейной дороги в разрезе?
– Чему равна ширина насыпи в нижней ее части?
– Как взаимосвязаны между собой катеты AH и BH прямоугольного треугольника ABH и угол A?
– Что можно сказать о четырехугольнике $HBCE$? Чему равна сторона HE?

IV. Самостоятельная работа (тест)

I уровень сложности

Вариант 1

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. *Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 41°$, $BC = 5$ см. *Найти:* AC.
   а) $5 \cdot \cos 41°$; в) $5 \cdot \operatorname{tg} 41°$;
   б) $5 : \operatorname{tg} 41°$; г) $5 : \sin 41°$.

2. *Дано*: $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$. *Найти:* $\operatorname{tg}\alpha$.
   а) $\dfrac{5}{12}$; б) $\dfrac{12}{13}$; в) $\dfrac{12}{5}$; г) $\dfrac{13}{12}$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота, $\angle A = \angle\alpha$, $AB = k$. Найдите AC, BC, AD.

4. Запишите полное решение задачи.

Стороны параллелограмма равны 4 и 5 см, угол между ними равен 45°. Найдите высоты параллелограмма.

Вариант 2

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. *Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = 49°$, $BC = 9$ см. *Найти:* AC.
   а) $9 : \operatorname{tg} 49°$; в) $9 : \sin 49°$;
   б) $9 \cdot \cos 49°$; г) $9 \cdot \operatorname{tg} 49°$.

2. *Дано:* $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$. *Найти:* $\operatorname{tg}\alpha$.
   а) $\dfrac{9}{8}$; б) $\dfrac{15}{8}$; в) $\dfrac{8}{15}$; г) $\dfrac{8}{9}$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

В треугольнике MNP $\angle P = 90°$, PK – высота, $\angle N = \beta$, $PN = b$. Найдите MN, MP, KN.

4. Запишите полное решение задачи.

Стороны параллелограмма равны 6 и 7 см, угол между ними равен 60°. Найдите высоты параллелограмма.

II уровень сложности

I вариант

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. В треугольнике KCP ($KC = CP$) $\angle C = 68°$, $KC = 12$ см. Найдите KP.

а) $12 \cdot \cos 34°$; в) $24 \cdot \sin 34°$;
б) $6 \cdot \cos 34°$; г) $24 : \sin 34°$.

2. Вычислите значение выражения $\sin^2 60° - 3 \cdot \text{tg}\, 45°$.

а) $-2,25$; в) $-0,75$;
б) $-1,25$; г) $-1,5$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

Треугольники ABC и ADB имеют общую сторону, $\angle ABC = \angle D = 90°$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$. Найдите AD, если $BC = a$.

4. Запишите полное решение задачи.

В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 6, а меньшая боковая сторона $2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 120°.

Вариант 2

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. В треугольнике CDE ($CD = DE$) $\angle D = 78°$, $CE = 16$ см. Найдите CD.

а) $8 \cdot \sin 39°$; в) $8 \cdot \cos 51°$;
б) $16 : \sin 78°$; г) $8 : \sin 39°$.

2. Вычислите значение выражения $\cos^2 45° - 4\sin 30°$.

а) -2; в) $-1,5$;
б) -3; г) $-2,5$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону, $\angle C = \angle ABD = 90°$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $AC = m$. Найдите AD.

4. Запишите полное решение задачи.

В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 8, а высота – $\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 150°.

III уровень сложности

Вариант 1

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 50 см, угол между стороной AB и диагональю BD равен 54°. Найдите сторону AB.

а) $50 : \text{tg}\, 54°$; в) $25 : (1 + \text{tg}\, 54°)$;
б) $25 : (2 + \text{tg}\, 54°)$; г) $25 : \text{tg}\, 54°$.

2. *Дано:* $ABCD$ – ромб, $\angle B = 40°$, $AC = 12$ см.
Найти: высоту ромба.

а) $6 \cdot \sin 70°$;
б) $12 \cdot \sin 70°$;
в) $6 : \cos 50°$;
г) $12 : \cos 40°$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, биссектриса AD равна a, $\angle A = \alpha$. Найдите BD.

4. Запишите полное решение задачи.

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle A = 30°$. Найдите высоту, опущенную к основанию, если $AD = 20$ см ($D \in$ прямой AB, $CD \perp AB$).

Вариант 2

В заданиях 1, 2 выберите правильный ответ.

1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 70 см, угол между стороной AD и диагональю BD равен 39°. Найдите сторону AB.

а) $70 : \text{tg}\, 39°$;
б) $\dfrac{35 \cdot \sin 39°}{1 + \cos 39°}$;
в) $\dfrac{35 \cdot (1 + \text{tg}\, 39°)}{\text{tg}\, 39°}$;
г) $\dfrac{35 \cdot \text{tg}\, 39°}{1 + \text{tg}\, 39°}$.

2. *Дано:* $ABCD$ – ромб, $\angle C = 140°$, $AC = 14$ см.
Найти: высоту ромба.

а) $14 \cdot \cos 70°$;
б) $7 : \sin 35°$;
в) $14 : \cos 70°$;
г) $14 \cdot \sin 70°$.

3. Решите задачу и запишите только ответ.

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle BAD = \beta$. Найдите BD.

4. Запишите полное решение задачи.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине равен 120°, CD – высота. Найдите AD, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см.

Ответы и указания к самостоятельной работе:

I уровень сложности

Вариант 1

1. б.
2. а.
3. $AC = k \cdot \cos\alpha$; $BC = k \cdot \sin\alpha$; $AD = k \cdot \cos^2\alpha$.
4. $2\sqrt{2}$ см и $2{,}5\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. г.
2. б.
3. $MN = b : \cos\beta$; $MP = b \cdot \text{tg}\,\beta$; $KN = b \cdot \cos\beta$.

4. $3\sqrt{3}$ см и $3{,}5\sqrt{3}$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. в.
2. а.
3. $a \cdot \sin\beta : \text{tg}\,\alpha$.
4. $14\sqrt{3}$ см^2.

Вариант 2

1. г.
2. в.
3. $\dfrac{m}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.
4. $11\sqrt{3}$ см^2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. в.
2. б.
3. $a \cdot \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \text{tg}\,\alpha - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

4. $\dfrac{20}{3}$см. $\angle ABC = 120°$ (тупой), значит, точка D лежит на прямой AB так, что B лежит между A и D. ΔACD – прямоугольный, $AC = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ см, тогда если провести высоту BH к стороне AC, то $AH = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ см. Из ΔABH ($\angle AHB = 90°$, $\angle A = 30°$) найдем $BH = \dfrac{20}{3}$ см.

Вариант 2

1. г.
2. г.
3. $c \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \text{tg}(\alpha - \beta))$.

4. 30 см. Пусть BH – высота, тогда в ΔABH $\angle A = 30°$, $BH = 10$ см, значит, $AH = \dfrac{30}{\sqrt{3}}$ см, $AC = 2AH = \dfrac{60}{\sqrt{30}}$. ΔABC – тупоугольный, точка D лежит на прямой AB так, что B лежит между A и D. Из прямоугольного треугольника ADC найдем $AD = AC \cdot \cos 30° = 30$ см.

V. Рефлексия учебной деятельности

(Учащиеся проверяют выполнение теста по готовым ответам, которые учитель вывешивает в конце урока на стенде или заранее готовит на интерактивной доске.)

Домашнее задание

1. Решить задачу № 77 (рабочая тетрадь).
2. Решить задачи № 559, 601, 602.

Урок 49. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Основные дидактические цели урока: совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобия треугольников и соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника; подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Тест с последующей самопроверкой.

Вариант 1

1. Для данного треугольника (рис. 7.159) справедливо равенство:

а) $h = \sqrt{a \cdot b}$;
б) $a = \sqrt{x \cdot y}$;
в) $b = \sqrt{y \cdot (x + y)}$.

2. Для данного треугольника (рис. 7.159) справедливо равенство:

а) $AB : BC = BD : DC$;
б) $AB : AD = BC : DC$;
в) $AB : AC = BD : AB$.

3. Для данного треугольника (рис. 7.160) справедливо равенство:

а) $BO : OE = \frac{1}{2}$;
б) $AO = \frac{2}{3}AD$;
в) $OD = 2AO$.

4. MN – средняя линия треугольника ABC (рис. 7.161), если:

а) $\angle BMN = \angle BAC$;

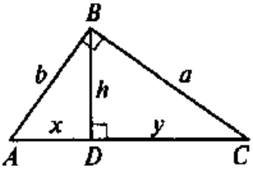


Рис. 7.159

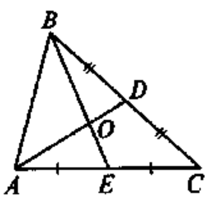


Рис. 7.160

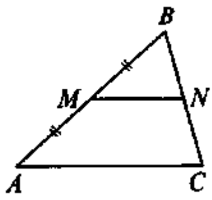


Рис. 7.161

б) $\angle AMN = \angle BNM$;

в) $BN : NC = MN : AC$.

5. Треугольник, образованный средними линиями прямоугольного треугольника, является:

а) равносторонним;

б) прямоугольным;

в) равнобедренным.

6. Для данного треугольника (рис. 7.162) справедливо равенство:

а) $a = b \cdot \cos\alpha$;

б) $a = c \cdot \cos\alpha$;

в) $a = c \cdot \sin\alpha$;

7. Для данного треугольника (рис. 7.163) справедливо равенство:

а) $c = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

б) $c = b \cdot \operatorname{tg}\beta$;

в) $b = c \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

8. Значение выражения $\sin 60° + \cos 45°$ равно:

а) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.

Вариант 2

1. Для данного треугольника (рис. 7.164) справедливо равенство:

а) $k = \sqrt{m+n}$;

б) $k^2 = m \cdot n$;

в) $x \cdot y = m \cdot n$.

2. Для данного треугольника (рис. 7.164) справедливо равенство:

а) $MN : NK = ME : KE$;

б) $NE : EK = ME : NK$;

в) $ME : NE = NE : KE$.

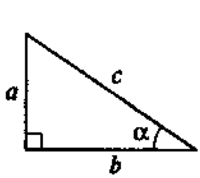


Рис. 7.162

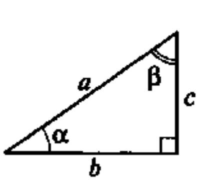


Рис. 7.163

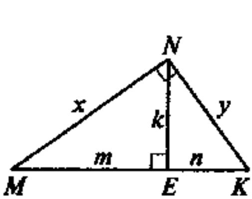


Рис. 7.164

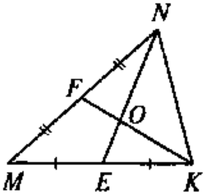


Рис. 7.165

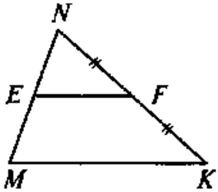


Рис. 7.166

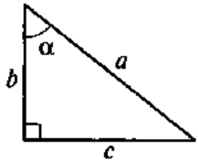


Рис. 7.167

3. Для данного треугольника (рис. 7.165) справедливо равенство:

а) $OE = NE : 3$;
б) $FO : OK = 2 : 1$;
в) $OE = OK : 2$.

4. EF – средняя линия треугольника MNK (рис. 7.166), если:

а) $\angle NEF + \angle NMK = 180°$;
б) $\angle KME + \angle MEF = 180°$;
в) $EF : MK = NM : NE$.

5. Треугольник, образованный средними линиями равнобедренного треугольника, является:

а) прямоугольным;
б) равносторонним;
в) равнобедренным.

6. Для данного треугольника (рис. 7.167) справедливо равенство:

а) $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$;
б) $b = c \cdot \sin\alpha$;
в) $b = a \cdot \sin\alpha$.

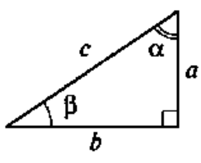


Рис. 7.168

7. Для данного треугольника (рис. 7.168) справедливо равенство:

а) $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$;
б) $a = b \cdot \operatorname{tg}\beta$;
в) $b = a \cdot \operatorname{tg}\beta$.

8. Значение выражения $\sin 45° + \cos 60°$ равно:

а) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответы к тесту:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
1	в	а	б	б	а	в	а	б
2	б	в	а	в	б	а	б	в

(После выполнения теста и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – восемь правильных ответов;
- оценка «4» – шесть-семь правильных ответов;
- оценка «3» – четыре-пять правильных ответов;
- оценка «2» – менее трех правильных ответов.

III. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

IV. Решение задач по готовым чертежам

(Ученики записывают в тетрадях краткое решение. Наиболее простые задачи можно решить устно, записав промежуточные результаты на рисунке.)

1. Рис. 7.169.

Найти: BC, AC, S_{ABC}.

2. Рис. 7.170.

Найти: MK, MN.

3. *Дано:* $ME = b$, $\Delta MPE = \beta$ (рис. 7.171).

Найти: MP и PA.

4. *Дано:* BF – биссектриса (рис. 7.172).

Найти: BF.

5. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 7.173).

Найти: CD, AC, S_{ABCD}.

6. *Дано:* $\angle(AC, BD) = 60°$ (рис. 7.174).

Найти: AB, AD, S_{ABCD}.

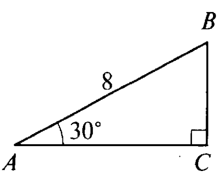


Рис. 7.169

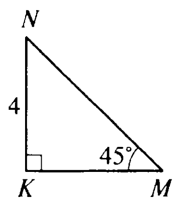


Рис. 7.170

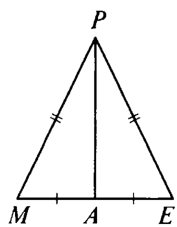


Рис. 7.171

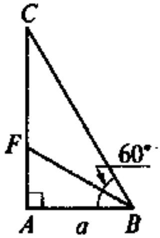


Рис. 7.172

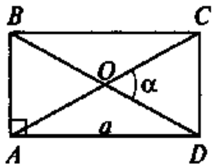


Рис. 7.173

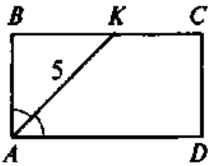


Рис. 7.174

7. *Дано:* $MN : MK = 5 : 3$, $AC + BC = 48$ (рис. 7.175).
Найти: MN, MK.
8. *Дано:* $ABMH$ – прямоугольник (рис. 7.176).
Найти: BH.
9. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.177).
Найти: S_{ABCD}.
10. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AM = 10$ см (рис. 7.178).
Найти: CF.
11. *Дано:* $CE \parallel BF \parallel AK$, $CE + BF + AK = 21$ (рис. 7.179).
Найти: CE, BF, AK.
12. *Дано:* $KM_1 = M_1P$, $AB \parallel MP$, $AB = 18$ (рис. 7.180).
Найти: MP.
13. Рис. 7.181.
Найти: AB.
14. *Дано:* $P_{ABC} = 2 \cdot p$ (рис. 7.182).
Найти: AB, AC, BC.

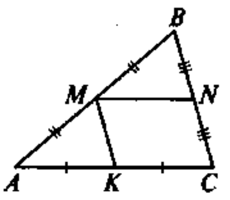


Рис. 7.175

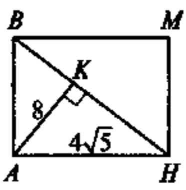


Рис. 7.176

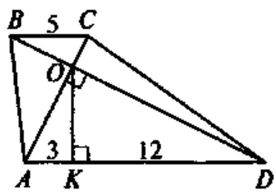


Рис. 7.177

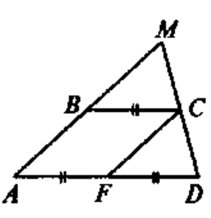


Рис. 7.178

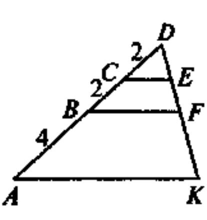


Рис. 7.179

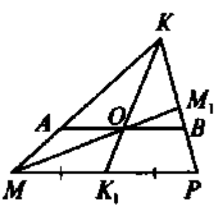


Рис. 7.180

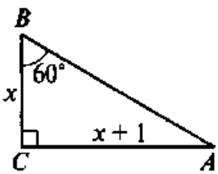


Рис. 7.181

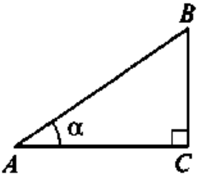


Рис. 7.182

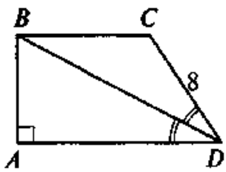


Рис. 7.183

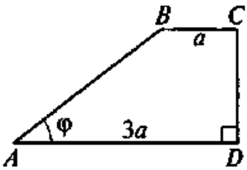


Рис. 7.184

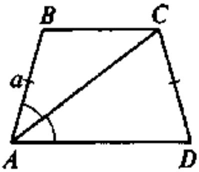


Рис. 7.185

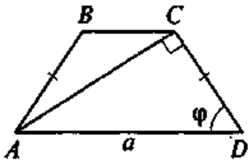


Рис. 7.186

15. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $\angle ADC = 2 \cdot \alpha$ (рис. 7.183).
Найти: S_{ABCD}.
16. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.184).
Найти: P_{ABCD}.
17. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $\angle BAC = \beta$ (рис. 7.185).
Найти: AD.
18. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7.186).
Найти: AB, BC, S_{ABCD}.
19. Рис. 7.187.
Найти: BC, AC, BD, S_{ABCD}.
20. Рис. 7.188.
Найти: AB, A_1B_1.
21. *Дано:* $MD : MB = 2 : 7$ (рис. 7.189).
Найти: $BO : PO$.

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1. $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$, $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$.
2. $MK = 4$, $MN = 4\sqrt{2}$.
3. $MP = \dfrac{b}{2 \cdot \sin\dfrac{\beta}{2}}$, $PA = \dfrac{b}{2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}$.

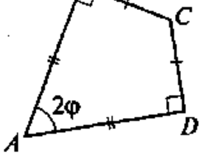


Рис. 7.187

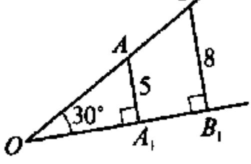


Рис. 7.188

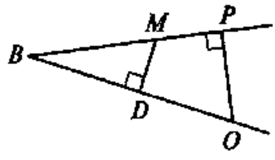


Рис. 7.189

4. $BF = \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

5. $CD = a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AC = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $S_{ABCD} = a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. $AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $AD = \frac{5\sqrt{6}}{2}$, $S_{ABCD} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

7. $MN = 15$, $MK = 9$.

8. $BH = 20$.

9. $S_{ABCD} = 80$.

10. $CF = 5$ см.

11. $CE = 3$, $BF = 6$, $AK = 12$.

12. $MP = 27$.

13. $AB = 1 + \sqrt{3}$.

14. $AB = \frac{2 \cdot p \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}$, $AC = \frac{2 \cdot p \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}$, $BC = \frac{2 \cdot p}{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}$.

15. $S_{ABCD} = 60 \cdot \sin 2\alpha + 32 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$.

16. $P_{ABCD} = \frac{2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot \sin\varphi + 4 \cdot a \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi}$.

17. $AD = a + 2 \cdot a \cdot \cos 2\beta$.

18. $AB = a \cdot \cos\varphi$, $BC = a - 2a \cdot \cos^2\varphi$, $S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin^3\varphi \cdot \cos\varphi$.

19. $BC = a$, $BD = 2a \cdot \cos\varphi$, $S_{ABCD} = 2a \cdot \sin\varphi$, $a^2 \cdot \sin 2\varphi$.

20. $AB = 6$, $A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

21. $BO : PO = 7 : 2$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решено не менее 15 задач;
- оценка «4» – правильно решены 11–14 задач;
- оценка «3» – правильно решены 7–10 задач;
- оценка «2» – правильно решены 0–6 задач.

(Оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за теоретический тест и за решение задач по готовым чертежам.)

V. Рефлексия учебной деятельности

Обсудить решение задач, которые вызвали затруднения у большинства учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 620, 622, 623, 625, 630.

Урок 50. Контрольная работа № 4 по теме «Применение теории подобия к решению задач. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Применение теории подобия треугольников при решении задач. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника».

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний по теме «Применение теории подобия треугольников при решении задач. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. Средние линии треугольника относятся как 2 : 2 : 4, а периметр треугольника равен 45 см. Найдите стороны треугольника.

2. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите EF, если сторона AC равна 15 см.

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 5$ см, $BC = 5\sqrt{3}$ см. Найдите угол B и гипотенузу AB.

4. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, сторона $BC = 7$ см, BH – высота. Найдите AH.

5*. В трапеции $ABCD$ продолжения боковых сторон пересекаются в точке K, причем точка B – середина отрезка AK. Найдите сумму оснований трапеции, если $AD = 12$ см.

Вариант 2

1. Стороны треугольника относятся как 4 : 5 : 6, а периметр треугольника, образованного его средними линиями, равен 30 см. Найдите средние линии треугольника.

2. Медианы треугольника MNK пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне MK и пе-

ресекающая стороны MN и NK в точках A и B соответственно. Найдите MK, если длина отрезка AB равна 12 см.

3. В прямоугольном треугольнике PKT ($\angle T = 90°$), $PT = 7\sqrt{3}$ см, $KT = 7$ см. Найдите угол K и гипотенузу KP.

4. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, высота BH равна 4 см. Найдите AC.

5*. В трапеции $MNKP$ продолжения боковых сторон пересекаются в точке E, причем $EK = KP$. Найдите разность оснований трапеции, если $NK = 7$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : DC = 3 : 2$, точка K – середина отрезка AB, точка F – середина отрезка AD, $KF = 6$ см, $\angle ADC = 100°$. Найдите BC и $\angle AFK$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $CB = 4\sqrt{3}$ см, CM – медиана. Найдите угол BCM.

3. В равнобедренной трапеции основания равны 8 см и 12 см, меньший угол равен α. Найдите периметр и площадь трапеции.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $OA = 13$ см, $OB = 10$ см.

5*. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AB \perp BD$, $BD = 2\sqrt{5}$, $AD = 2\sqrt{10}$, CE – высота треугольника BCD, а $\operatorname{tg}\angle ECD = 3$. Найдите BE.

Вариант 2

1. На стороне AM треугольника ABM отмечена точка H так, что $AH : HM = 4 : 7$; точка C – середина стороны AB, точка O – середина отрезка BH, $AM = 22$ см, $\angle BOC = 105°$. Найдите CO и $\angle BHM$.

2. В прямоугольном треугольнике MNK $\angle K = 90°$, $KM = 6$ см, $NK = 6\sqrt{3}$см, KD – медиана. Найдите угол KDN.

3. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 6 см, меньшее основание равно 10 см, а меньший угол равен α. Найдите периметр и площадь трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы пересекаются в точке O, $OB = 10$ см, $BC = 12$ см. Найдите гипотенузу треугольника.

5*. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AC = 6\sqrt{2}$, $BC = 6$, DE – высота треугольника ACD, а $\operatorname{tg}\angle ACD = 2$. Найдите CE.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $BC = 1$ м, $\angle B = \alpha$. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная к ней?

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы CK и BM взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите гипотенузу AB, если $OM = \sqrt{2}$ см.

3. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна к боковой стороне CD, $BE \perp AC$ ($E \in AC$), основания трапеции равны 10 см и 8 см. Найдите $AE : EC$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании BC равен β. Найдите отношение высот BN и AM.

5*. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и CD отмечены точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 3$, $CN : ND = 2 : 5$. Найдите отношение площадей четырехугольников $AMND$ и $MBCN$.

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике MNK ($\angle K = 90°$) $KN = 1$ дм, $\angle M = \alpha$. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная к ним?

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы BM и CK пересекаются в точке O. Из точки C на BM опущен перпендикуляр CE так, что $ME = 20$ см. Найдите гипотенузу AB, если $MC = 30$ см, точка O лежит на отрезке ME.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания равны 5 см и 13 см. Диагональ BD перпендикулярна к боковой стороне AB, $CK \perp BD$ ($K \in BD$). Найдите $BK : KD$.

4. В равнобедренном треугольнике MNK угол при основании MK равен α. Найдите отношение высот ME и NH.

5*. В прямоугольнике $MNKP$ на сторонах NK и MP отмечены точки E и F так, что $NE : EK = 3 : 4$, $MF : FP = 2 : 3$. Найдите отношение площадей четырехугольников $MNEF$ и $PKEF$.

Итоговый тест № 4

Вариант 1

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки K и E так, что $AK = KB$, $BE = CE$, $KE = 6$ см. Сторона AC равна:

1) 3 см;	3) 12 см;
2) 6 см;	4) 9 см.

А2. Точки K, P и E – середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC. Периметр треугольника ABC равен 24 см. Периметр треугольника KPE равен:

1) 12 см;
2) 48 см;
3) 24 см;
4) 32 см.

А3. Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 20 см. Данная высота треугольника равна:

1) 25 см;
2) 15 см;
3) 12,5 см;
4) 10 см.

А4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота треугольника, $AC = 5$ см, $CB = 10$ см. Отношение площадей треугольников ACD и CDB равно:

1) 1 : 4;
2) 1 : 2;
3) 4 : 1;
4) 2 : 1.

А5. В треугольнике KCP ($KC = CP$) $\angle C = 68°$, $KC = 12$ см. Найдите KP.

1) $12 \cdot \cos 34°$;
2) $6 \cdot \cos 34°$;
3) $24 \cdot \sin 34°$;
4) $24 : \sin 34°$.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка так, что один из них на 4 см больше другого. Найдите основания трапеции, если средняя линия равна 14 см.

В2. Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна 6 см и делит гипотенузу на отрезки, один из которых больше другого на 5 см. Найдите стороны треугольника.

В3. Стороны параллелограмма равны 4 см и 5 см, угол между ними равен 45°. Найдите высоты параллелограмма.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 3 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

С2. В треугольнике со сторонами 15 см, 15 см и 24 см найдите расстояния от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

Вариант 2

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и P так, что $AM = MB$, $BP = CP$, $AC = 14$ см. Чему равен отрезок MP?

1) 21 см;
2) 28 см;
3) 14 см;
4) 7 см.

А2. Точки M, K и F – середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC. Периметр треугольника MKF равен 16 см. Периметр треугольника ABC равен:

1) 16 см;	3) 24 см;
2) 32 см;	4) 8 см.

А3. Высота CD, проведенная из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC, равна 12 см, а отрезок $AD = 9$ см. Отрезок BD равен:

1) 16 см;	3) 21 см;
2) 10,5 см;	4) 3 см.

А4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота треугольника, $AC = 4$ см, $CB = 12$ см. Отношение площадей треугольников ACD и CDB равно:

1) 1 : 3;	3) 3 : 1;
2) 1 : 9;	4) 9 : 1.

А5. В треугольнике CDE ($CD = DE$) $\angle D = 78°$, $CE = 16$ см. Найдите CD.

1) $8 \cdot \sin 39°$;	3) $8 \cdot \cos 51°$;
2) $16 : \sin 78°$;	4) $8 : \sin 39°$.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка так, что один из них в 2 раза больше другого. Найдите основания трапеции, если средняя линия равна 18 см.

В2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CD так, что длина отрезка BD на 4 см больше длины отрезка CD, $AD = 9$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

В3. Стороны параллелограмма равны 6 см и 7 см, угол между ними 60°. Найдите высоты параллелограмма.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 5 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

С2. Расстояния от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника до сторон равны 8 см, 8 см и 5 см. Найдите стороны треугольника.

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Ответы и указания к задачам контрольной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. 10 см, 15 см, 20 см (рис. 7.190).

$6 \cdot x + 4 \cdot x + 8 \cdot x = 45;$

$x = 2{,}5;$

$6 \cdot x = 15$ см, $4 \cdot x = 10$ см, $8 \cdot x = 20$ см.

2. $EF = 10$ см (рис. 7.191).

$BO : BB_1 = 2 : 3$, следовательно, $EF : AC = 2 : 3$.

3. $\angle B = 30°$, $AB = 10$ см. $\operatorname{tg} A = \dfrac{CB}{AC} = \sqrt{3}$, следовательно, $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$. $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 10$ см.

4. $AH = \dfrac{7 \cdot \sin\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. $BH = BC \cdot \sin\beta = 7 \cdot \sin\beta$. $BH : AH = \operatorname{tg}\alpha$, следовательно, $AH = \dfrac{BH}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{7 \cdot \sin\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

5. $AD + BC = 18$ см. $BC \parallel AD$, $AB = BK$, следовательно, BC – средняя линия ΔAKD, значит, $BC = 6$ см.

Вариант 2

1. 4 см, 5 см, 6 см (рис. 7.192).

$4 \cdot x + 5 \cdot x + 6 \cdot x = 30$; $x = 2$. $2 \cdot x = 4$ см; $2{,}5 \cdot x = 5$ см; $3 \cdot x = 6$ см.

2. $MK = 18$ см (рис. 7.193).

$NO : NN_1 = 2 : 3$, следовательно, $AB : MK = 2 : 3$.

3. $\angle K = 60°$, $KP = 14$ см. $\operatorname{tg} P = \dfrac{KT}{TP} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, следовательно, $\angle H = 30°$, $\angle K = 60°$. $KP = \sqrt{KT^2 + TP^2} = 14$ см.

4. $AC = \dfrac{4}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta}$. $\operatorname{tg}\alpha = BH : AH$, следовательно, $AH = \dfrac{4}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = BH : HC$, значит, $HC = \dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta}$, $AC = AH + HC = \dfrac{4}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta}$.

5. $MP - NK = 7$ см. $NK \parallel MP$, $EK = KP$, следовательно, NK – средняя линия ΔMEP, отсюда $MP = 14$ см.

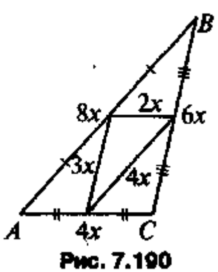


Рис. 7.190

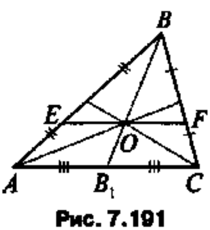


Рис. 7.191

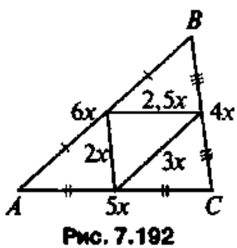


Рис. 7.192

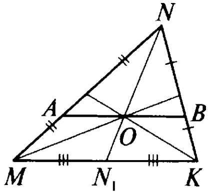


Рис. 7.193

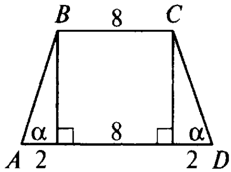


Рис. 7.194

II уровень сложности

Вариант 1

1. $BC = 10$ см, $\angle AFK = 80°$. KF – средняя линия ΔABD, следовательно, $BD = 12$ см. $BD : DC = 3 : 2$, значит, $DC = 8$ см, отсюда $BC = 10$ см. $\angle AFK = \angle ADB = 80°$.

2. $\angle BCM = 30°$. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. В ΔAMC $CM = MA = AC$, следовательно, $\angle ACM = 60°$, значит, $\angle BCM = 30°$.

3. $S_{ABCD} = 20 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $P_{ABCD} = 20 + \dfrac{4}{\cos\alpha}$.

$\operatorname{tg}\alpha = BH : AH$ (рис. 7.194), следовательно, $BH = AH \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

$S_{ABCD} = (BC + AD) : 2 \cdot BH = 20 \cdot \operatorname{tg}\alpha$. $\cos\alpha = AH : AB$, отсюда $AB = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$.

$$P_{ABCD} = 8 + 12 + \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\cos\alpha} = 20 + \frac{4}{\cos\alpha}.$$

4. $S_{ABC} = 180$ см^2. Если BB_1 – медиана, то $BO : OB_1 = 2 : 1$, тогда $OB_1 = 5$ см, $BB_1 = 15$ см. ΔAOB_1 – прямоугольный, значит, $AB = \sqrt{AB^2 - OB_1^2} = 12$ см, следовательно, $AC = 24$ см. $S_{ABC} = AC \cdot BB_1 : 2 = 180$ см^2.

5. $BE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ΔABD – прямоугольный ($\angle B = 90°$), в нем $AB = BD = 2\sqrt{5}$, следовательно, $\angle ADB = 45°$. ΔBCE – прямоугольный, $\angle CBE = 45°$, значит, $\angle CEB = 45°$, т. е. $BE = CE$. $\operatorname{tg}\angle ECD = ED : CE = 3$, следовательно, $ED = 3 \cdot CE$. $BD = BE + ED = CE + 3 \cdot CE = 2\sqrt{5}$, отсюда $CE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, т. е. $BE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Вариант 2

1. $CO = 4$ см, $\angle BHM = 75°$. $AM = 22$ см, тогда так как $AH : HM = 4 : 7$, то $AH = 8$ см. CO – средняя линия ΔABH, значит, $CO = 4$ см. $\angle BHM = 180° - \angle BOC = 75°$.

2. $\angle KDN = 120°$. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. В ΔKDM $KD = DN = MK$, следовательно, $\angle KDM = 60°$, отсюда $\angle KDN = 120°$.

3. $S_{ABCD} = 12 \cdot \sin\alpha \cdot (5 + 3\cos\alpha)$, $P_{ABCD} = 32 + 12 \cdot \cos\alpha$. $\sin\alpha = BH : AB$ (рис. 7.195), следовательно, $BH = AB \cdot \sin\alpha = 6 \cdot \sin\alpha$. $\cos\alpha = AH : AB$, значит, $AH = AB \cdot \cos\alpha = 6 \cdot \cos\alpha$. $AD = 12 \cdot \cos\alpha + 10$.

$S_{ABCD} = (BC + AD) : 2 \cdot BH = 12 \cdot \sin\alpha \cdot (5 + 3\cos\alpha)$.

$P_{ABCD} = 12 \cdot \cos\alpha + 10 + 10 + 6 + 6 = 32 + 12 \cdot \cos\alpha$.

4. $6\sqrt{13}$ см. Если BB_1 – медиана, то $BO : OB_1 = 2 : 1$, тогда $OB_1 = 5$ см, $BB_1 = 15$ см. ΔCBB_1 – прямоугольный, значит, $CB_1 = \sqrt{BB_1^2 - CB^2} = 9$ см, отсюда $AC = 18$ см, значит, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6\sqrt{3}$ см.

5. $CE = 2\sqrt{2}$. ΔABC – прямоугольный ($\angle B = 90°$), в нем $AB = BC = 6$, следовательно, $\angle BCA = 45°$. $BC \parallel AD$, отсюда $\angle CAD = \angle BCA = 45°$. ΔAED – прямоугольный, $\angle EAD = 45°$, тогда $AE = DE$. $\operatorname{tg}\angle ACD = 2$, значит, $DE : CE = 2$, следовательно, $DE = 2 \cdot CE$. $AC = AE + CE = DE + CE = 2 \cdot CE + CE = 6\sqrt{2}$, значит, $EC = 2\sqrt{2}$.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $\operatorname{tg}^2\alpha$. Пусть CH – высота, проведенная к гипотенузе. ΔCBH – прямоугольный, $CH = \sin\alpha$, $BH = \cos\alpha$. ΔACH – прямоугольный, $HA : CH = \operatorname{tg}\alpha$, следовательно, $HA = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, $\dfrac{HA}{BH} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

2. $AB = 6$ см. $OM = \sqrt{2}$ см, следовательно, $OB = 2\sqrt{2}$ см. В ΔMBC $\angle C = 90°$, $OC \perp MB$, значит, $OC = \sqrt{OM \cdot OB} = 2$ см, отсюда $KO = 1$ см, $KC = 3$ см. KC – медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника. $KC = AB : 2$, следовательно, $AB = 6$ см.

3. $AE : EC = 1 : 4$.

В ΔACD $\angle C = 90°$, $CK \perp AD$, $AK = 9$ см, $KD = 1$ см (рис. 7.196), следовательно, $CK = \sqrt{AK \cdot KD} - 3$ см, $AC = 3\sqrt{10}$ см. $\Delta AKC \sim \Delta CEB$,

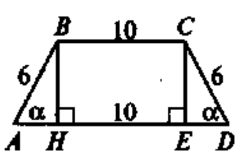


Рис. 7.195

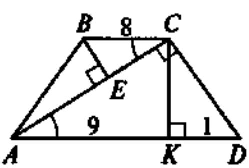


Рис. 7.196

значит, $\frac{AK}{EC} = \frac{AC}{BC}$, отсюда $EC = \frac{12\sqrt{10}}{5}$ см, следовательно, $AE = AC - EC = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ см, т. е. $AE : EC = 1 : 4$.

4. $BN : AM = 2 \cdot \cos\beta$.

5. Пусть x — одна часть стороны AB или CD, тогда $AM = 7 \cdot x$, $MB = 21 \cdot x$, $CN = 8 \cdot x$, $ND = 20 \cdot x$. $AMND$ и $MBCN$ — прямоугольные трапеции.

$S_{AMND} = \frac{1}{2}AD(AM + ND)$, $S_{MBCN} = \frac{1}{2}BC(MB + CN)$.

Вариант 2

1. $\text{tg}^2\,\alpha$. Пусть KE — высота, проведенная к гипотенузе. ΔKNE — прямоугольный, $\angle NEK = \alpha$, следовательно, $NE = \sin\alpha$, $KE = \cos\alpha$. ΔKEM — прямоугольный, $KE : ME = \text{tg}\,\alpha$, значит, $ME = \frac{KE}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, $\frac{NE}{ME} = \text{tg}^2\,\alpha$.

2. $AB = 15\sqrt{21}$ см.

ΔMCE — прямоугольный, $EC = \sqrt{MC^2 - ME^2} = \sqrt{500}$ см. ΔMBC — прямоугольный, $EC \perp MB$, следовательно, $EC = \sqrt{ME \cdot EB}$, отсюда $EB = 25$ см, значит, $MB = 45$ см. Так как $MO = MB : 3 = 15$ см, то $OE = 5$ см. ΔOEC — прямоугольный, следовательно, $OC = \sqrt{OE^2 + EC^2} = 5\sqrt{21}$ см, значит, $CK = \frac{15\sqrt{21}}{2}$ см. $AB = 2 \cdot CK = 15\sqrt{21}$ см. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

3. $AB : KD = 5 : 8$.

В ΔABD $\angle B = 90°$, $BH \perp AD$, $AH = 4$ см, $HD = 9$ см (рис. 7.197), следовательно, $BH = \sqrt{AH \cdot HD} = 6$ см, $BD = 3\sqrt{13}$ см. $\Delta BHD \sim \Delta CKB$, следовательно, $\frac{BH}{CK} = \frac{HD}{BK} = \frac{BD}{BC}$, отсюда $BK = \frac{15\sqrt{13}}{13}$ см,

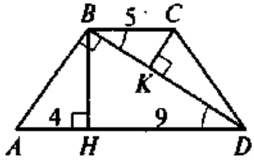


Рис. 7.197

значит, $KD = BD - BK = \frac{24\sqrt{13}}{13}$ см, т. е. $BK : KD = 5 : 8$.

4. $ME : NH = 2\cos\alpha$. $ME = MK \cdot \sin\alpha$, $NH = \frac{MK}{2} \cdot \text{tg}\,\alpha$.

5. $S_{MNEF} : S_{PKEF} = 17 : 18$. Так как $MP = NK$, то $NE = 20 \cdot x$, $EK = 15 \cdot x$, $MF = 14 \cdot x$, $FP = 21 \cdot x$. $MNEF$ и $PKEF$ — прямоугольные трапеции.

$S_{MNEF} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (NE + MF)$, $S_{PKEF} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot (EK + FP)$.

Ответы итогового теста № 4:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	C1	C2
1	3	1	4	1	3	10 см и 18 см	13 см, $3\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{13}$ см	$2\sqrt{2}$ см, $2{,}5\sqrt{2}$ см	$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{1}{3}$	3 см, 4,8 см, 4,8 см
2	4	2	1	2	4	12 см и 24 см	$AB = 25$ см, $AC = 15$ см, $BC = 20$ см	$3\sqrt{3}$ см, $3{,}5\sqrt{3}$ см	$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{5}{1}$	25 см, 25 см, 40 см

Критерии оценивания результатов контрольной работы:

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи или правильно решены две задачи, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «3» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «2» – правильно решено менее двух задач.

За правильно решенную дополнительную задачу (№ 5) ставится дополнительная оценка.

Критерии оценивания результатов итогового теста:

- оценка «5» – учащийся набрал 14–19 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 9–13 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–8 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

За каждое правильно выполненное задание части А ставится 1 балл, части В – 2 балла, части С – 4 балла.

Глава VIII
ОКРУЖНОСТЬ

Формируемые УУД: *предметные:* знать различные случаи взаимного расположения прямой и окружности; иметь понятие о касательной, точке касания, отрезках касательных, проведенных из одной точки, градусной мере дуги окружности, центральном и вписанных углах, серединном перпендикуляре, вписанной и описанной окружностях; об описанном около окружности и вписанном в нее многоугольнике; знать свойство касательной и ее признак, свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки; свойство биссектрисы угла; свойство описанного и вписанного четырехугольников; знать теоремы о вписанном угле и ее следствия, об отрезках пересекающихся хорд, о серединном перпендикуляре, о точке пересечения высот треугольника, об окружности, вписанной в треугольник и описанной около него; уметь доказывать теоремы и применять изученную теорию в процессе решения задач; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал, уметь извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; уметь доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

Урок 51. Взаимное расположение прямой и окружности

Основные дидактические цели урока: рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе.

1) Провести общий анализ контрольной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

2. Решение задач для подготовки учащихся к изучению нового материала (работа в парах с последующим обсуждением решения).

1) В окружности с центром O проведены диаметр AC и радиус OK так, что хорда KC равна радиусу. Найдите угол AOK.

2) В окружности с центром O проведены диаметр AC и хорда BC, равная радиусу. Найдите стороны треугольника ABC, если радиус окружности равен 5 см.

3) В окружности с центром O проведена хорда BC, равна 8 см. Найдите расстояние от точки O до отрезка BC, если радиус окружности равен 5 см.

4) Даны окружность с центром O и точка A. Найдите кратчайшее расстояние от точки A до окружности, если радиус окружности равен 7 см, а длина отрезка OA равна: а) 4 см; б) 10 см; в) 7 см.

III. Работа по теме урока

1. Решение задачи (работа в группах).

Даны окружность радиуса r и прямая p, не проходящая через центр O окружности. Расстояние от точки O до прямой a равно d. Сколько точек пересечения могут иметь данные окружность и прямая, если: а) $d < r$; б) $d = r$; в) $d > r$?

(Учитель делит класс на группы по 4 человека. Каждая группа получает одну из задач. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

2. Обсуждение решения задачи.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.1) и запись:

а) $d > r$. Отложим на прямой p отрезки $HA = HB = \sqrt{r^2 - d^2}$. По теореме Пифагора $AO = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + \left(r^2 - d^2\right)} = r$,

$BO = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + \left(r^2 - d^2\right)} = r.$

$OA = OB = r$, следовательно, A и B лежат на окружности, отсюда прямая p и окружность имеют две общие точки.

Других общих точек прямая p и окружность не имеют. Докажем это: пусть существует еще одна общая точка C, тогда ΔAOC – равнобедренный, его медиана $OD \perp p$, но это невозможно, так как из точки O к прямой p можно провести только один перпендикуляр.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.2) и запись:

б) $d = r$. $d = OH = r$, следовательно, H лежит на окружности, отсюда прямая p и окружность имеют одну общую точку. Других общих точек нет, иначе для любой точки M на прямой p, отличной от H, $OM > OH$ (как любая наклонная больше перпендикуляра), следовательно, точка M не лежит на окружности.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.3) и запись:

в) $d > r$. $OH > r$, отсюда так как $OM > OH$, то $OM > r$, следовательно, точка M не лежит на окружности.

Наводящие вопросы.

– Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения?
– Как взаимное расположение прямой и окружности зависит от радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой? (*Ответ*. Если расстояние от центра окруж-

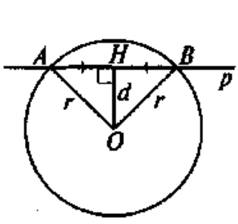


Рис. 8.1

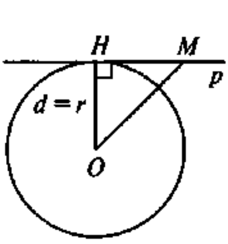


Рис. 8.2

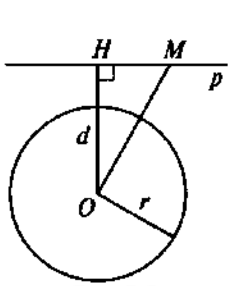


Рис. 8.3

ности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 78 (устно).

2) Решить задачу № 79.

Задача № 79

По условию задачи окружность и прямая AB имеют только одну общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от центра окружности – точка O – до прямой AB, то окружность и прямая имели бы две общие точки.

Если бы радиус окружности был больше расстояния от точки C до прямой AB, то окружность и прямая не имели бы общих точек.

Следовательно, радиус R окружности равен расстоянию от точки C до прямой AB, т. е. равен катету AC.

Итак, $R = AC = \sqrt{CB^2 - BA^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см.

Ответ: радиус окружности равен 12 см.

3) Решить задачу № 80 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

2. Решить дополнительную задачу.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне, а большее основание в два раза больше CD. С центром в точке D проведена окружность радиусом, равным CD. Докажите, что прямая AC и окружность имеют одну общую точку.

Доказательство:

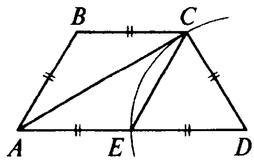


Рис. 8.4

а) Так как радиус окружности равен CD, то $AE = ED$, где E – точка пересечения окружности с основанием AD трапеции (рис. 8.4), следовательно, $ABCE$ – параллелограмм ($BC \parallel AE$, $BC = AE$), отсюда $AB = CE$.

б) Так как $CE = AB = CD = DE$, то ΔCDE – равносторонний, $\angle ECD = 60°$, следовательно, $\angle BCE = 60°$.

в) $ABCE$ – ромб (это параллелограмм, в котором все стороны равны), следовательно, диагональ AC является биссектрисой угла BCE, т. е. $\angle ACE = 30°$, значит, $\angle ACD = 90°$.

г) Найдем расстояние от центра D окружности до прямой AC, оно равно длине перпендикуляра, опущенного из точки D к прямой AC, т. е. CD, так как $\angle ACD = 90°$.

Итак, получили, что если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения?
2. Как взаимное расположение прямой и окружности зависит от радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой?
3. Могут ли пересекаться окружность с радиусом 8 см и прямая, удаленная от центра окружности на 4 см, 8 см, 11 см?

Домашнее задание

1. П. 70, вопросы 1, 2 (учебник, с. 184).
2. Решить задачи № 631 (в, г), 632, 633.
3. Решить дополнительную задачу.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) катеты равны 5 см и 12 см. С центром в точке C проведена окружность. Каково взаимное расположение окружности и прямой AB, если радиус окружности равен:

а) $4\frac{8}{13}$ см; б) $4\frac{5}{13}$ см; в) $4\frac{12}{13}$ см.

Решение: Расстояние от центра C окружности до прямой AB равно высоте CK треугольника ABC. $S_{ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ см^2; $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CK$, значит, $CK = \frac{S_{ABC}}{AB:2} = 4\frac{8}{13}$ см.

а) $R = 4\frac{8}{13}$ см и $CK = 4\frac{8}{13}$ см, следовательно, окружность и прямая AB имеют одну общую точку.

б) $R = 4\frac{5}{13}$ см $< CK = 4\frac{8}{13}$ см, следовательно, окружность и прямая AB не имеют общих точек.

в) $R = 4\frac{12}{13}$ см $> CK = 4\frac{8}{13}$ см, следовательно, окружность и прямая AB имеют две общие точки.

Урок 52. Касательная к окружности

Основные дидактические цели урока: ввести понятия касательной, точки касания, отрезков касательных, проведенных из одной точки; рассмотреть свойство касательной и ее признак и показать их применение при решении задач; рассмотреть свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки, и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический тест.

1) Выберите верное утверждение.

Окружность и прямая имеют две общие точки, если:

а) Расстояние от центра окружности до прямой не превосходит радиуса окружности.

б) Расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности.

в) Расстояние от окружности до прямой меньше радиуса.

2) Закончите фразу так, чтобы получилось верное высказывание.

Окружность и прямая имеют одну общую точку, если...

3) Вставьте пропущенные слова.

Окружность и прямая имеют одну общую точку, если ... расстояние от ... до прямой ... .

4) Установите истинность или ложность следующих утверждений:

а) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если она имеет с окружностью общие точки.

б) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если она пересекает окружность в двух точках.

в) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если расстояние от центра окружности до данной прямой не больше радиуса.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 632, 633. Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать после выполнения теста.)

Задача № 632

Краткое решение: На прямой p отложим два отрезка AB и AC (рис. 8.5) такие, что $AB = AC = \sqrt{r^2 - d^2}$. По теореме Пифагора $OB = OC = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r \Rightarrow$ точки B и C лежат на окружности $\Rightarrow$ прямая p является секущей по отношению к данной окружности.

Задача № 633

Краткое решение: ΔACO – прямоугольный, так как $OABC$ – квадрат (рис. 8.6). По теореме Пифагора $AC^2 = AO^2 + OC^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$ см.

OH – высота равнобедренного треугольника ACO, проведенная к его основанию $\Rightarrow OH$ – медиана этого треугольника, т. е. $AH = HC = 3\sqrt{2}$ см.

В ΔAOH по теореме Пифагора $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow OH = 3\sqrt{2}$ см $\approx 4{,}2$ см.

Радиус окружности равен 5 см $\Rightarrow OH < r \Rightarrow AC$ и окружность пересекается в двух точках. Итак, секущими по отношению к этой окружности являются AC и OA. AB и BC не являются секущими, так как $d = OA = OC = 6$ см $> r = 5$ см.

Ответ: AC и OA.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие касательной и точки касания.

Определение: Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.7) и запись:

p – касательная к окружности; A – точка касания.

2. Доказательство теоремы о свойстве касательной к окружности (учебник, с. 164, рис. 212).

– Предположим, что прямая p не перпендикулярна радиусу OA. Сравните расстояние от центра окружности до прямой p с радиусом окружности. (*Ответ.* Расстояние от точ-

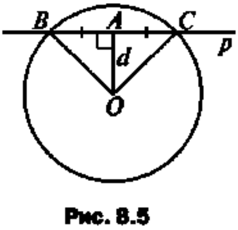


Рис. 8.5

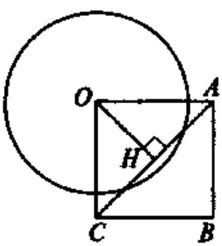


Рис. 8.6

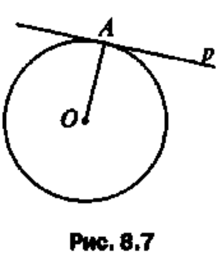


Рис. 8.7

ки O – центра окружности – до прямой p меньше радиуса, так как радиус OA в данном случае является наклонной по отношению к прямой p, а расстояние от точки O до прямой p – перпендикуляром к прямой p, а, как известно, любая наклонная больше перпендикуляра, проведенного из той же точки к той же прямой, что и наклонная.)

– Каково взаимное расположение прямой p и окружности? Почему?
– Может ли прямая p быть касательной к окружности? Объясните. (*Прямая p не может быть касательной к окружности, так как она имеет с ней две общие точки.*)
– Верно ли предположение, что прямая p не перпендикулярна радиусу OA? О чем это говорит? (*Предположение о том, что прямая p не перпендикулярна радиусу, неверное, следовательно, прямая p перпендикулярна радиусу.*)

Теорема: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

3. Ввести понятие отрезков касательных, проведенных из одной точки.

Определение: Отрезки AB и AC называются отрезками касательных, проведенными из точки A, если прямые AB и AC являются касательными к окружности, точки B и C – точками касания.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.8) и запись:

AB и AC – отрезки касательных, проведенные из точки A. B и C – точки касания.

4. Доказательство свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки.

(Учитель делит класс на группы по 4 человека. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

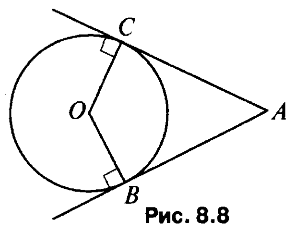


Рис. 8.8

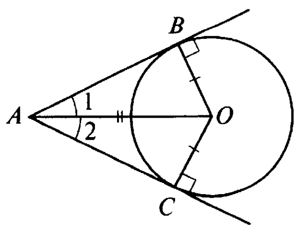


Рис. 8.9

Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Решение: По теореме о свойствах касательной к окружности $AB \perp OB$ и $AC \perp OC$ (рис. 8.9), следовательно,

ΔAOB и ΔAOC – прямоугольные, они равны по катету ($OB = OC$) и гипотенузе (OA), отсюда $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Наводящие вопросы.

– Соединим точки A и O отрезком. Что можно сказать о треугольниках AOB и AOC?
– Чем является луч AO для угла BAC? О чем это говорит?

5. Знакомство с признаком касательной и его доказательство.

– Сформулируйте теорему, обратную свойству касательной к окружности.

Теорема: Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

– Верна ли теорема, обратная свойству касательной к окружности?
– Докажите ее справедливость. (*Ответ.* По условию теоремы радиус является перпендикуляром к прямой, значит, расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу. Это говорит о том, что прямая и окружность имеют одну общую точку, т. е. прямая является касательной к окружности.)

6. Решение задачи на построение.

Дана окружность с центром в точке O и точка M на ней. Построить касательную к окружности, проходящую через точку M (рис. 8.10).

Вопросы для обсуждения.

– Предположим, что a – касательная к окружности, проходящая через точку M. Каково взаимное расположение прямой a и радиуса OM?
– Как построить касательную к окружности, проходящую через M?

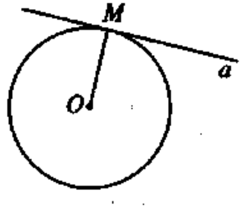


Рис. 8.10

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 81, 82.

(Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся его слушают, а затем исправляют ошибки. Так же проверить задачу № 82.)

2. Решить задачу № 638.

Решение: ΔAOB – прямоугольный, по теореме Пифагора (рис. 8.11) $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{1{,}75}$ см.

Ответ: $\sqrt{1{,}75}$ см.

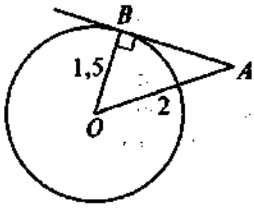


Рис. 8.11

Наводящие вопросы.

– Как построить касательную к окружности? (*Сначала провести радиус OB, где B – точка касания, затем провести прямую AB так, что* $AB \perp OB$.)

– Докажите, что прямая AB является касательной к окружности. (*По признаку касательной к окружности.*)

3. Решить задачи № 640, 635, 637 (самостоятельно).

Задача № 640

Краткое решение: ΔAOB прямоугольный, $OA = 9$ см, $OB = 4{,}5$ см $\Rightarrow \angle BAO = 30°$. $\Delta OAC = \Delta AOB \Rightarrow \angle OAC = 30° \Rightarrow \angle BAC = 60°$ (рис. 8.12).

Ответ: 60°.

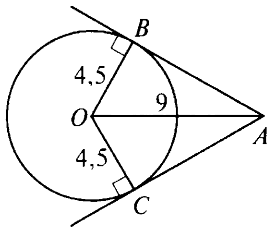


Рис. 8.12

Задача № 635

Краткое решение: В ΔAOB $OA = AB$ по условию задачи (рис. 8.13), $OB = OA$ как радиусы одной окружности $\Rightarrow \Delta AOB$ – равносторонний, $\angle OAB = 60°$. $OA \perp AC \Rightarrow \angle CAB = 90° - 60° = 30°$.

Ответ: 30°.

Задача № 637

Краткое решение: ΔAOC – равнобедренный ($OA = OC$ как радиусы) $\Rightarrow \angle 1 = 30°$, $OC \perp CD$ (радиус окружности перпендикулярен касательной) $\Rightarrow \angle OCD = 90°$ (рис. 8.14).

$\angle ACD = \angle 1 + \angle OCD = 180° - (\angle A + \angle ACD) = 180° - (30° + 120°) = 30° \Rightarrow \Delta ACD$ – равнобедренный с основанием AD.

4. Решить дополнительную задачу.

AB и BC – отрезки касательных, проведенные из точки B к окружности с центром O. Найдите AB и BC, если $OA = 16$ см, а радиусы, проведенные к точкам касания, взаимно перпендикулярны.

Решение: Так как BA и BC – отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности (рис. 8.15), то $OA \perp AB$, $OC \perp CB$, $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle AOB = \angle COB$. Так как $OA \perp OC$ и $\angle AOB = \angle COB = 45°$, следовательно, $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 45°$. ΔAOB –

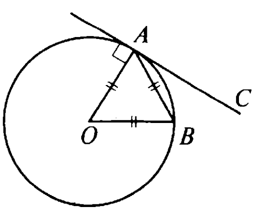


Рис. 8.13

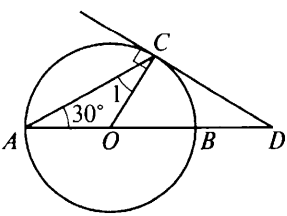


Рис. 8.14

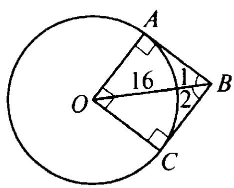


Рис. 8.15

равнобедренный с основанием OB, значит, $OA = AB$. По теореме Пифагора $OA^2 + AB^2 = OB^2$, так как $OA = AB$, то $2 \cdot OA^2 = 16^2$, следовательно, $OA = 8\sqrt{2}$ см, отсюда $AB = BC = 8\sqrt{2}$ см.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см, $8\sqrt{2}$ см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая прямая называется касательной к окружности?
2. Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?
3. Какие отрезки называются отрезками касательных к окружности, проведенными из одной точки?
4. Сформулируйте свойство касательной и ее признак.
5. Сформулируйте свойство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Домашнее задание

1. П. 71, вопросы 3–7 (учебник, с. 184).
2. Решить задачу № 83 (рабочая тетрадь).
3. Решить задачи № 634, 636, 639.

Урок 53. Решение задач по теме «Касательная к окружности»

Основные дидактические цели урока: закрепить теоретический материал по теме «Касательная к окружности»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика готовят доказательства теорем у доски. Заслушать после проверки домашнего задания.)

1) Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.

2) Сформулируйте и докажите теорему о свойстве отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки.

3) Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 83 (рабочая тетрадь), № 639. Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 639

Решение: ΔAOB – прямоугольный, $\angle A = 90° - \angle O = 30°$ (рис. 8.16), следовательно, $OB = \frac{1}{2}OA$, отсюда $OA = 24$ см.

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 12\sqrt{3}$ см.

Ответ: $12\sqrt{3}$ см.

Наводящие вопросы.

– Каково взаимное расположение касательной AB и радиуса OB?

– Как найти катет AB треугольника AOB?

3. Решение задач по готовым чертежам.

1. *Дано:* $R = 5$, AB – касательная (рис. 8.17).

Найти: OB.

2. *Дано:* AB – касательная (рис. 8.18); $AB = 12$, $OB = 13$.

Найти: радиус окружности.

3. *Дано:* AB, BC – касательные, $OB = 2$, $AO = 4$ (рис. 8.19).

Найти: $\angle BOC$.

4. *Дано:* AB – касательная, $R = 6$, $AO = OB$ (рис. 8.20).

Найти: AO.

5. *Дано:* M, N, K – точки касания (рис. 8.21).

Найти: P_{ABC}.

6. *Дано:* $AB = 10$ см, O – центр окружности, CD – касательная, $AE \parallel CD$ (рис. 8.22).

Найти: OC.

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1. $OB = 5\sqrt{2}$.

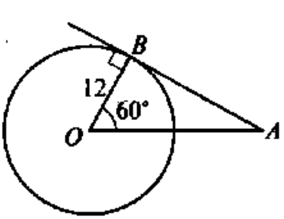


Рис. 8.16

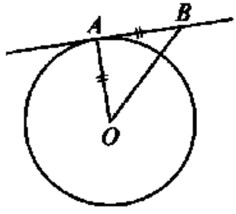


Рис. 8.17

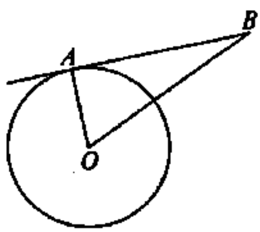


Рис. 8.18

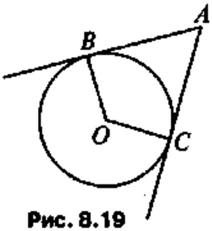


Рис. 8.19

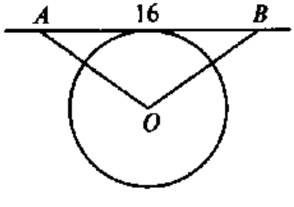


Рис. 8.20

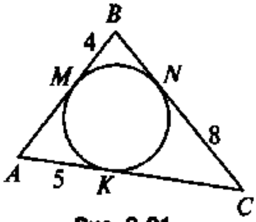


Рис. 8.21

2. $R = 5$.
3. $\angle BOC = 120°$.
4. $OA = 10$.
5. $P_{ABC} = 34$.
6. $OC = 6\frac{1}{4}$.

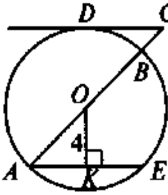


Рис. 8.22

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены три-две задачи;
- оценка «2» – правильно решена одна задача.

III. Решение задач

1. Решить задачу № 84 (рабочая тетрадь).

Задача № 84

Так как в треугольнике AOM $AO = OM$, то $\angle AMO = \angle MAO = 30°$.

В треугольнике AMC $\angle AMC = 180° - (\angle MAC + \angle MCA) = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle AMO = 120° - 30° = 90°$, т. е. $MC \perp OM$.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса OM, лежащий на окружности, и перпендикуляра к этому радиусу. Поэтому она является касательной к данной окружности, что и требовалось доказать.

2. Решить задачи № 641, 644, 647 (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 641

Краткое решение: В ΔOAC $\angle C = 90°$ (рис. 8.23), $OC = \frac{1}{2} \cdot OA \Rightarrow \angle OAC = 30° \Rightarrow \angle BAC = 60°$.

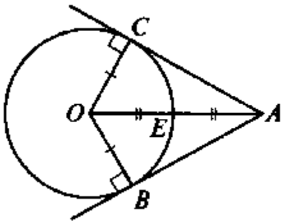


Рис. 8.23

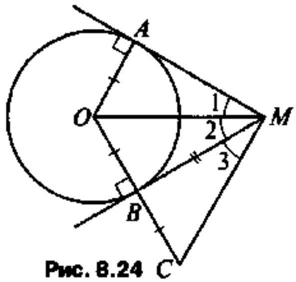


Рис. 8.24

Задача № 644

Краткое решение: MA и MB – отрезки касательных, проведенные из точки $M \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (рис. 8.24). Точки O и C симметричны относительно точки $B \Rightarrow OB = BC$ и O, B, C лежат на одной прямой $\Rightarrow \Delta OMB = \Delta CMB$ по двум катетам $\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow$ $\angle AMC = 3 \cdot \angle BMC$.

Задача № 647

Краткое решение:

а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см (рис. 8.25) $\Rightarrow$ $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 3$ см $= r \Rightarrow AH$ – касательная к окружности.

б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см $\Rightarrow OH =$ $= HA$, $OH^2 + HA^2 = OA^2 \Rightarrow 2 \cdot OH^2 = 16 \Rightarrow$ $OH = 2\sqrt{2}$ см $\neq 3$ см $\Rightarrow AH$ является касательной к окружности.

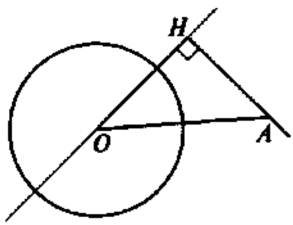


Рис. 8.25

в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см $\Rightarrow OH = \frac{1}{2} \cdot OA = 3$ см $= r \Rightarrow AH$ – касательная к окружности.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за первую часть урока ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

IV. Самостоятельная работа

(К первой задаче самостоятельной работы записать краткое решение (на рисунке); ко второй задаче – полное решение.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. Прямая KE касается окружности с центром в точке O, K – точка касания. Найдите OE, если $KE = 8$ см, а радиус окружности равен 6 см.

2. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см. Докажите, что AB – отрезок касательной, проведенный из точки A к окружности с центром в точке C и радиусом, равным 3 см.

Вариант 2

1. Прямая MN касается окружности с центром в точке O, M – точка касания, $\angle MNO = 30°$, а радиус окружности равен 5 см. Найдите NO.

2. В треугольнике MNK $MN = 6$ см, $MK = 8$ см, $NK = 10$ см. Докажите, что MK – отрезок касательной, проведенный из точки K к окружности с центром в точке N и радиусом, равным 6 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. AB и BC – отрезки касательных, проведенные к окружности с центром O и радиусом, равным 10 см. Найдите BO, если $\angle AOC = 60°$.

2. Докажите, что основание AC равнобедренного треугольника ABC является касательной окружности с центром в точке B и радиусом, равным медиане треугольника, проведенной к его основанию.

Вариант 2

1. MN и NK – отрезки касательных, проведенные к окружности с центром O, $\angle MNK = 90°$. Найдите радиус окружности, если $ON = 2\sqrt{2}$ см.

2. Докажите, что стороны равностороннего треугольника касаются окружностей, проведенных с центрами в его вершинах и радиусами, равными любой из его биссектрис.

III уровень сложности

Вариант 1

1. EK и EF – отрезки касательных, проведенные к окружности с центром O и радиусом, равным 6 см, $\angle KOF = 120°$, A – точка пересечения KF и OE. Найдите OA и AE.

2. Даны угол и отрезок. Постройте окружность радиусом, равным данному отрезку, касающуюся сторон данного угла.

Вариант 2

1. PM и PN – отрезки касательных, проведенные к окружности с центром O и радиусом, равным 10 см, $\angle MON = 120°$, E – точка пересечения MN и OP. Найдите OE и PE.

2. Даны угол и отрезок. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, с центром, удаленным от вершины угла на расстояние, равное длине данного отрезка.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Каким может быть взаимное расположение прямой и окружности?
2. Сформулируйте свойство касательной и признак касательной.
3. Сформулируйте свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки.

Домашнее задание

Решить задачи № 641, 643, 645, 648.

Урок 54. Градусная мера дуги окружности

Основные дидактические цели урока: ввести понятие градусной меры дуги окружности, центрального угла; научить решать простейшие задачи на вычисление градусной меры дуги окружности.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности.

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 645, 648. Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать после выполнения практического задания.)

2. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. $OE = 10$ см.

2. ΔABC – прямоугольный, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Вариант 2

1. $NO = 10$ см.

2. ΔMNK – прямоугольный, $NK^2 = MN^2 + MK^2$.

II уровень сложности

Вариант 1

1. $BO = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

2. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его высотой.

Вариант 2

1. $R = 2$ см.

2. Любая биссектриса равностороннего треугольника является его высотой.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $OA = 3$ см, $AE = 9$ см.

2. Провести прямые, параллельные сторонам данного угла и удаленные от них на расстояние, равное данному отрезку во внутренней области данного угла. Точка пересечения этих прямых есть центр искомой окружности.

Вариант 2

1. $OE = 5$ см, $PE = 15$ см.

2. Построить биссектрису данного угла и на ней отметить точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное данному отрезку. Полученная точка есть центр искомой окружности, а ее радиус равен длине перпендикуляра, опущенного из данной точки к любой из сторон угла.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие дуги окружности (учебник, с. 167, рис. 214). Ознакомить со способами обозначения дуг.

2. Ввести понятие полуокружности (учебник, с. 167, рис. 215, а)).

3. Ввести понятие центрального угла.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.26) и запись:

$\angle AOB = \smile AB$, $\angle BOC = \smile BC$, $\angle AOC = \smile ABC$.

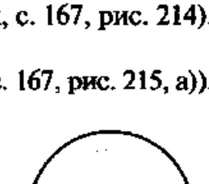


Рис. 8.26

$\smile AB$ меньше полуокружности, следовательно, $\smile AB = \angle AOB$.

$\smile ACB$ больше полуокружности, следовательно, $\smile ACB = 360° - \angle AOB$.

$\smile AB + \smile ACB = 360°$.

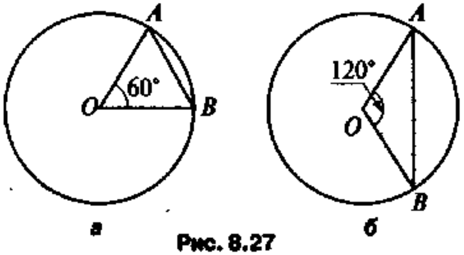


Рис. 8.27

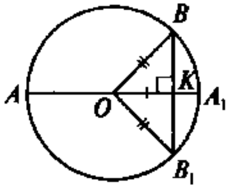


Рис. 8.28

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 85 (устно).

2) Решить задачу № 86 (письменно с последующим обсуждением решения).

2. Решить задачи № 650 (а, в), 651 (а) (устно).

3. Решить задачу № 649 (а, в) (работа в парах).

Задача № 649 (а, в)

а) $\angle AOB = 60°$, AB – хорда (рис. 8.27 а).

б) $\angle AOB = 120°$, AB – хорда (рис. 8.27 б).

4. Решить задачи № 715, 716.

Задача № 715

Рис. 8.28.

Решение: $\cup AB = \angle AOB$, так как $\cup AB$ меньше полуокружности. $\cup AB_1 = \angle AOB_1$, так как $\cup AB_1$ меньше полуокружности.

$\Delta OBK = \Delta OB_1K$ по гипотенузе и катету ($OB = OB_1$ как радиусы, OK – общий катет, $\angle OKB = \angle OKB_1 = 90°$), следовательно, $\angle BOK = \angle B_1OK$, отсюда $\angle AOB = 180° - \angle BOK = 180° - \angle B_1OK = \angle AOB_1$, значит, $\cup AB = \cup AB_1$.

Задача № 716

Рис. 8.29.

Решение: $\cup AB = \cup CD$, следовательно, $\angle AOB = \angle COD$, отсюда $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы одной окружности), тогда $AB = CD$.

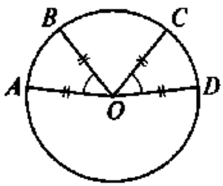


Рис. 8.29

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;

- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой угол называется центральным?
2. Чему равна величина центрального угла?
3. Какая дуга окружности называется полуокружностью?
4. Как вычислить градусную меру дуги окружности?

Домашнее задание

1. П. 72, вопросы 8–10 (учебник, с. 184).
2. Решить задачи № 649 (б, г), 650 (б), 651 (б), 652.

Урок 55. Теорема о вписанном угле

Основные дидактические цели урока: ввести понятие вписанного угла; рассмотреть теорему о вписанном угле и следствия из нее; показать применение теоремы о вписанном угле и следствий из нее при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Решение задач по готовым чертежам (устно).

1) *Дано:* $\cup MKE$ в два раза меньше $\cup MNE$ (рис. 8.30).
Найти: $\cup MKE$, $\cup MNE$.

2) *Дано:* $\cup AKE$ на 140° меньше $\cup APE$ (рис. 8.31).
Найти: $\cup APE$.

3) *Дано:* $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 2 : 3 : 4$ (рис. 8.32).
Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.

4) *Дано:* $\angle MON : \angle NOK : \angle MOE = 3 : 4 : 5$ (рис. 8.33).
Найти: $\cup ME$, $\cup NK$, $\cup KE$.

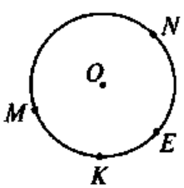


Рис. 8.30

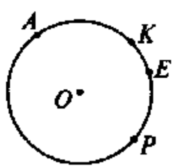


Рис. 8.31

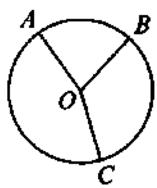


Рис. 8.32

Рис. 8.33

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1) $\cup MKE = 120°$, $\cup MNE = 240°$.

2) $\cup APE = 250°$.

3) $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle AOC = 160°$.

4) $\cup ME = 120°$, $\cup NK = 96°$, $\cup KE = 72°$.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 652. Ученик заранее готовит решение на доске.)

Задача № 652

Решение: $\angle COD = 180° - (\angle AOC + \angle BOD) = 180° - (37° + 23°) = 120°$ (рис. 8.34).

В ΔCOD $\angle COD = 120°$, $OC = OD$, следовательно, $\angle OCD = \angle CDO = 30°$. Проведем высоту OH, отсюда $\cos 30° = \frac{CH}{CO}$, значит, $CH = CO \cdot \cos 30° = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ см.

OH – высота и медиана, следовательно, $CD = 2 \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ см.

Ответ: $CD = 15\sqrt{3}$ см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольнике COD?

– Проведем высоту катета CH. Как можно найти длину катета CH?

– Чему равна длина хорды CD?

3. Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

1) Рис. 8.35.

Найти: $\cup AC$.

2) Рис. 8.36.

Найти: $\angle ABC$.

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1) $\cup AC = 60°$.

2) $\angle ABC = 45°$.

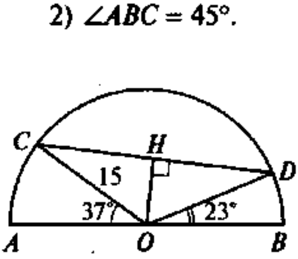


Рис. 8.34

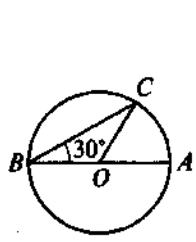


Рис. 8.35

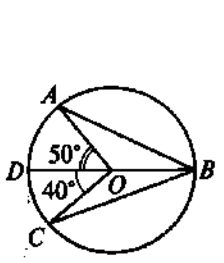


Рис. 8.36

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие вписанного угла.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.37) и запись:

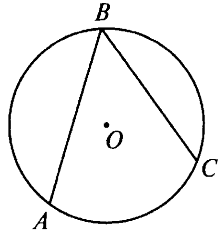


Рис. 8.37

Определение: Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

$\angle ABC$ – вписанный в окружность с центром O.

$\angle ABC$ опирается на $\cup AC$.

2. Доказать теорему о вписанном угле.

а) Случай, когда луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC учитель доказывает сам в ходе беседы с учащимися.

б) Случаи, когда луч BO делит угол ABC на два угла и когда луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла, предложить учащимся доказать самостоятельно с последующим обсуждением доказательств.

Теорема: Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Дано: $\angle ABC$ – вписанный угол, опирающийся на дугу AC; O – центр окружности.

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

Доказательство: Возможны три случая.

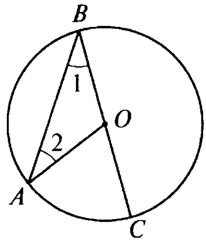


Рис. 8.38

Первый случай: Луч BO совпадает с одной из сторон угла (рис. 8.38). Проведем радиус OA.

– Что можно сказать о ΔAOB? (*ΔAOB – равнобедренный, так как $AO = OB$ как радиусы, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника.*)

– Каким по отношению к ΔAOB является $\angle AOC$? Чему равна его градусная мера? (*$\angle AOC$ – внешний угол ΔAOB. $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1 = 2 \cdot ABC$.*)

– Каким является $\angle AOC$ по отношению к окружности? Чему равна его величина? (*$\angle AOC$ – центральный, $\angle AOC = \cup AC$.*)

– Выразите величину $\angle ABC$ через величину дуги AC. (*Так как $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.*)

Итак, $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает одну из задач. На обсуждение дается 5 мин.)

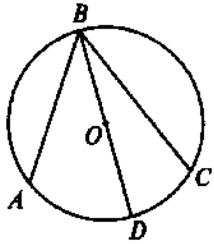


Рис. 8.39

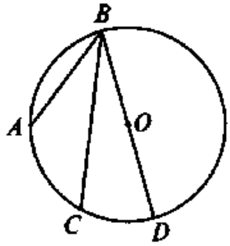


Рис. 8.40

Задача 1. Рассмотреть второй случай и доказать, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

Задача 2. Рассмотреть третий случай и доказать, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

(Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Второй случай: Луч OB проходит между сторонами $\angle ABC$ (рис. 8.39), следовательно, $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$. Исходя из первого случая $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$, $\angle CBD = \frac{1}{2}\cup CD$, следовательно,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CD) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

Третий случай: Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла (рис. 8.40), следовательно, $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD) = \frac{1}{2}\cup AC.$

3. Решить задачи для доказательства следствий 1 и 2 теорем о вписанном угле (работа в парах).

Задача 1. Доказать, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Задача 2. Доказать, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 87 (устно).

2) Решить задачи № 88, 89 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 88

Угол AOB является центральным углом данной окружности и равен 92°, следовательно, $\cup AMB = 92°$.

Угол ACB является вписанным углом и опирается на дугу AMB, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AMB = 46°$.

Ответ: $\angle ACB = 46°$.

Задача № 89

Угол MAP является вписанным углом и опирается на дугу MBP. $\cup MBP = 360° - \cup MAP = 360° - 120° = 240°$,

$\angle MAP = \frac{1}{2} \cup MBP = 120°$.

Ответ: $\angle MAP = 120°$.

2. Решить задачу № 653 (устно).

3. Решить задачу № 656.

(Один ученик работает у доски, остальные — в тетрадях.)

Задача № 656

Первый случай:

$\cup AC = 43°$, $\cup AB = 115°$ (рис. 8.41), значит, $\cup COB = 360° - (\cup AC + \cup AB) = 202°$. Вписанный $\angle BAC$ опирается на дугу COB и равен ее половине, т. е. $\angle BAC = 101°$.

Второй случай:

$\cup CB = \cup ACB - \cup AC = 115° - 43° = 72°$ (рис. 8.42). $\angle BAC$ является вписанным и равен половине дуги CB, на которую он опирается, т. е. $\angle BAC = 36°$.

Ответ: 101° или 36°.

Наводящие вопросы.

— Что можно сказать о градусной мере дуги AB (дуги AC)?

— Чему равна градусная мера дуги CDB?

— На какую дугу опирается угол BAC и чему равна его величина?

— Сколько решений имеет задача?

4. Решить задачи № 654 (а, в), 658 (самостоятельно).

Задача № 654 (а, в)

Краткое решение:

а) $x = \frac{1}{2}(360° - 152° - 80°) = 64°$.

в) $x = \frac{1}{2}(360° - 180° - 112°) = 34°$.

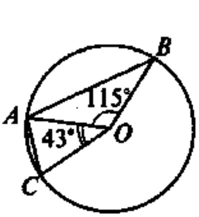


Рис. 8.41

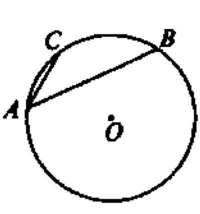


Рис. 8.42

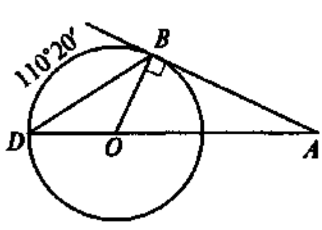


Рис. 8.43

Задача № 658

Краткое решение: $\angle DOB$ – центральный, $\angle DOB = \cup DB = 110°20'$ (рис. 8.43).

ΔDOB – равнобедренный с основанием $DB \Rightarrow \angle ODB = OBD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle DOB) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 110°20') = \frac{1}{2} \cdot 69°40' = 34°50' \Rightarrow$ $\angle ADB = 34°50'$.

$\angle BOA$ – внешний угол $\Delta DOB \Rightarrow \angle BOA = \angle OBD + \angle ODB = 69°40'$.

$\angle OBA = 90°$, так как радиус OB перпендикулярен касательной AB, тогда в прямоугольном ΔOAB $\angle BAD = 90° - \angle BOA = 90° - 69°40' = 20°20'$.

Ответ: $\angle BAD = 20°20'$, $\angle ADB = 34°50'$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой угол называется вписанным?
2. Сформулируйте теорему о вписанном угле и следствия из нее.
3. Градусная мера дуги, на которую опирается вписанный угол, равна 35°. Чему равна градусная мера вписанного угла? А соответствующего центрального угла?

Домашнее задание

1. П. 73, вопросы 11–13 (учебник, с. 184).
2. Решить задачи № 654 (б, г), 655, 657, 659.

Урок 56. Теорема об отрезках пересекающихся хорд

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему об отрезках пересекающихся хорд и показать ее применение при решении задач; совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о вписанном угле и ее следствий.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Пять учеников готовят доказательства теорем у доски.) Заслушать после решения задач по готовым чертежам.)

1) Доказать теорему о вписанном угле:

а) первый случай;

б) второй случай;

в) третий случай.

2) Доказать, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

3) Доказать, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.

2. Решение задач по готовым чертежам.

(Учитель индивидуально проверяет домашнее задание.)

1) Рис. 8.44.
Найти: $\angle ABC$.
2) Рис. 8.45.
Найти: $\angle ABC$.
3) Рис. 8.46.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.
4) Рис. 8.47.
Найти: $\angle AOD$, $\angle ACD$.
5) Рис. 8.48.
Найти: $\angle ABC$.
6) Рис. 8.49.
Найти: $\angle BCD$.
7) Рис. 8.50.
Найти: $\angle BAC$.
8) Рис. 8.51.
Найти: $\angle ADC$.
9) Рис. 8.52.
Найти: $\angle BAD$.

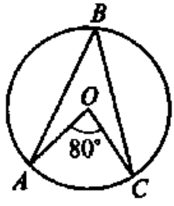


Рис. 8.44

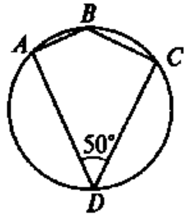


Рис. 8.45

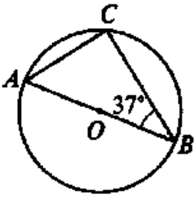


Рис. 8.46

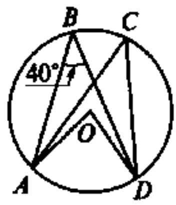


Рис. 8.47

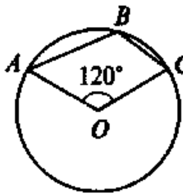


Рис. 8.48

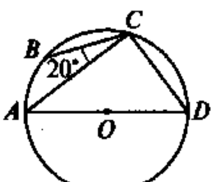


Рис. 8.49

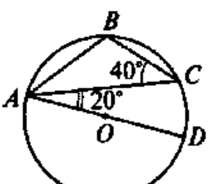


Рис. 8.50

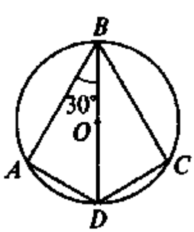


Рис. 8.51

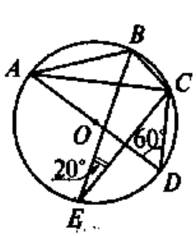


Рис. 8.52

Ответы к задачам по готовым чертежам:

1) $\angle ABC = 40°$.
2) $\angle ABC = 130°$.
3) $\angle A = 53°$, $\angle C = 90°$.
4) $\angle AOD = 80°$, $\angle ACD = 40°$.
5) $\angle ABC = 120°$.
6) $\angle BCD = 110°$.
7) $\angle BAC = 30°$.
8) $\angle ADC = 120°$.
9) $\angle BAD = 50°$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены восемь-девять задач;
- оценка «4» – правильно решены шесть-семь задач;
- оценка «3» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «2» – правильно решено менее трех задач.

III. Работа по теме урока

1. Решить задачу для подготовки учащихся к восприятию нового материала (работа в группах).

Доказать: $\Delta AEC \sim \Delta DEB$ (рис. 8.53).

Найти: AE, если $BE = 4$ см; $DE = 6$ см, $CE = 2$ см.

2. Решить задачу для доказательства теоремы об отрезках пересекающихся хорд.

Задача. Докажите, что если две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, то $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.54) и запись:

План-конспект доказательства теоремы:

а) $\Delta ACE \sim \Delta DBE$ ($\angle A = \angle D$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу BC; $\angle AEC = \angle DEB$ как вертикальные).

б) $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, следовательно, $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Вопросы для обсуждения.

– Что можно сказать об углах CAB и CDB? А об углах AEC и DEB?

– Какими являются треугольники ACE и DBE? Чему равно отношение их сторон, являющихся отрезками хорд касательных?

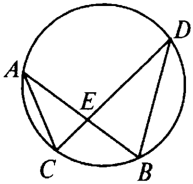


Рис. 8.53

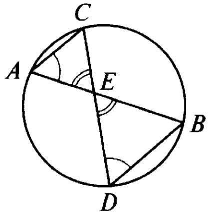


Рис. 8.54

– Какое равенство можно записать из равенства двух отношений, используя основное свойство пропорций?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 93, 94 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 93

Решение: Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение отрезков хорды KM равно произведению отрезков хорды PT, т. е. $PC \cdot TC = KC \cdot MC$.

Обозначим длину отрезка PC буквой x, тогда $CT = 16 - x$, следовательно, $x \cdot (16 - x) = 7 \cdot 4$. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 - 16 \cdot x + 28 = 0$ равны 2 и 14.

Итак, либо $PC = 2$ и тогда $CT = 14$, либо $PC = 14$ и тогда $CT = 2$.

Ответ: $PC = 2$ см, $CT = 14$ см и $PC = 14$ см, $CT = 2$ см.

Задача № 94

Решение: Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой окружности, пересекающимися в точке M. Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot BM = MH \cdot CM$. Но так как $5 \cdot 6 \neq 8 \cdot 4$, то точка H не лежит на данной окружности.

Ответ: не лежит.

2. Решить задачи № 667, 670.

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 667

ΔOBB_1 равнобедренный (рис. 8.55). $OC \perp BB_1$, следовательно, является высотой и медианой ΔOBB_1, т. е. $BC = B_1C$. AA_1 и BB_1 – хорды, пересекающиеся в точке C, отсюда $A_1C \cdot AC = B_1C \cdot BC$.

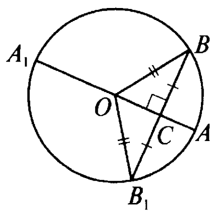


Рис. 8.55

Так как $B_1C = BC$, то $BC^2 = 8 \cdot 4 = 32$, $BC = 4\sqrt{2}$ см, а $BB_1 = 8\sqrt{2}$ см.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о ΔBB_1O?

– Рассмотрим хорды AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке C. Каким свойством обладают отрезки, полученные при пересечении этих хорд?

Задача № 670

Решение: $\Delta ABP \sim \Delta BAQ$ по двум углам ($\angle BQP = \angle ABP = \frac{1}{2}\smile BP$, $\angle A$ – общий) (рис. 8.56), следовательно, $\frac{AB}{AP} = \frac{AQ}{AB}$, отсюда $AB^2 = AP \cdot AQ$.

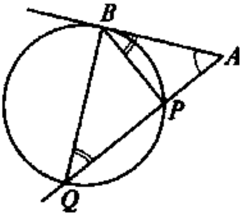


Рис. 8.56

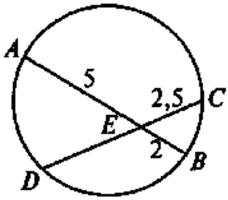


Рис. 8.57

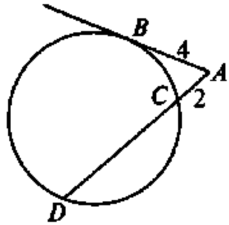


Рис. 8.58

Наводящие вопросы.

– Подобны ли ΔABP и ΔBAQ? Почему?

– Чему равно отношение их сходственных сторон?

3. Решить задачи № 666 (а), 671 (а) (самостоятельно).

Задача № 666 (а)

Краткое решение:

$$AE \cdot BE = CE \cdot ED \Rightarrow ED = \frac{AE \cdot BE}{CE} = \frac{5 \cdot 2}{2{,}5} = 4 \text{ (рис. 8.57).}$$

Ответ: $ED = 4$.

Задача № 671 (а)

Краткое решение:

$$AB^2 = AC \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow CD = AD - AC = 8 - 2 =$$
$= 6$ см (рис. 8.58).

Ответ: 6 см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему об отрезках пересекающихся хорд.
2. Хорды AB и MK пересекаются в точке O. $AO = 6$ см, $BO = 8$ см, $MO = 12$ см. Чему равна длина отрезка KO?

Домашнее задание

1. П. 73, вопрос 14 (учебник, с. 184).
2. Решить задачи № 660, 666 (б, в), 668, 671 (б).

Урок 57. Решение задач по теме «Центральные и вписанные углы»

Основные дидактические цели урока: систематизировать теоретические знания по теме «Центральные и вписанные углы»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Один ученик оформляет доказательство теоремы на доске.)

Сформулировать и доказать теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 660, 668. Два ученика заранее готовят решение на доске. Заслушать после решения задач в рабочих тетрадях.)

Задача № 660

Решение: $\angle CBD$ – вписанный, опирающийся на дугу CD, равную $100°$ (рис. 8.59), следовательно, $\angle CBD = 50°$.

$\angle CBD$ – внешний угол ΔABD, отсюда $\angle CBD = \angle BAD + \angle BDA$, значит, $\angle BDA = \angle CBD - \angle BAD = 50° - 32° = 18°$.

$\angle BDA = \angle BDE = 18°$. $\angle BDE$ – вписанный угол, следовательно, $\angle BDE = \frac{1}{2}\cup BE$, т. е. $\cup BE = 36°$.

Ответ: $36°$.

Наводящие вопросы.

– Каким является $\angle CBD$ и чему равна его величина (по отношению к окружности и по отношению к ΔABD)?

– Чему равен $\angle BDA$? А величина дуги BE?

Задача № 668

Решение: Построить ΔABC (рис. 8.60). Он прямоугольный, так как $\angle ABC$ опирается на диаметр. BD – высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, следовательно, BD есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, т. е. $BD = \sqrt{AD \cdot DC}$.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о ΔABC?

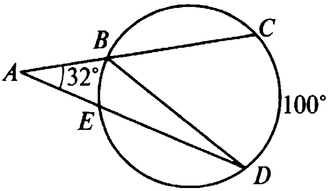


Рис. 8.59

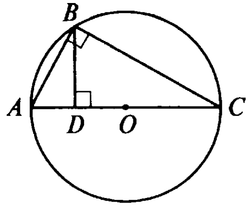


Рис. 8.60

– Чем для ΔABC является BD?

– Каким свойством обладает высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла?

3. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 90, 92 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

III. Решение задач

1. Решить задачу № 669.

Задача № 669

Построить: отрезок $AB = \sqrt{MN \cdot PK}$ (рис. 8.61).

Построение:

1) На прямой построить отрезок AB, равный сумме длин отрезков MN и PK.

2) Построить середину отрезка AB – точку O.

3) Построить окружность с центром в точке O и радиусом, равным AO.

4) Построить перпендикуляр к отрезку AB через точку Q, лежащую на отрезке AB так, что $AQ = MN$, $BQ = PK$.

5) Построить точку пересечения данного перпендикуляра с построенной окружностью – точку E.

6) Отрезок QE – искомый.

2. Решить задачи № 662, 664 (самостоятельно с последующей проверкой).

Задача № 662

Решение: $\angle ACD$ – вписанный угол (рис. 8.62), следовательно, $\angle ACD = \frac{1}{2}\cup AD = 27°$. $\angle CAB$ – вписанный угол, отсюда $\angle CAB = \frac{1}{2}\cup CB = 35°$. $\angle BEC$ – внешний угол ΔAEC, следовательно, $\angle BEC = \angle CAE + \angle ACE = 27° + 35° = 62°$.

Ответ: $\angle BEC = 62°$.

Задача № 664

Краткое решение: ΔAOB – равнобедренный (рис. 8.63) $\Rightarrow$ $\angle A = \angle B$, $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle B \Rightarrow \cup AB = \angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle B$.

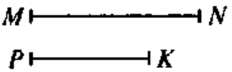


Рис. 8.61

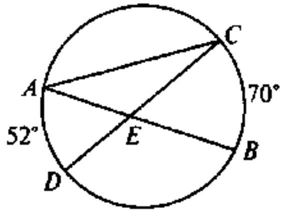


Рис. 8.62

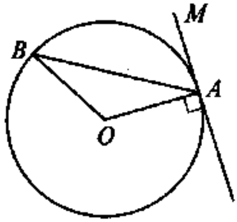


Рис. 8.63

$OA \perp AM$ по свойству касательной $\Rightarrow \angle OAM = 90° \Rightarrow \angle MAB = \angle OAM - \angle OAB = 90° - \angle B$.

Так как $\angle MAB = 90° - \angle B$, $\cup AB = 180° - 2 \cdot \angle B$, то $\angle MAB = \frac{1}{2}\cup AB$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $\cup AB : \cup AC = 3 : 2$, $\angle A = 50°$ (рис. 8.64).

Найти: $\angle B$, $\angle C$, $\angle BOC$.

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите CD, если $AE = 4$ см, $BE = 9$ см, а длина CE в 4 раза больше длины DE.

Вариант 2

1. *Дано:* $\angle B = 60°$, $\cup AB : \cup BC = 7 : 5$ (рис. 8.65).

Найти: $\angle A$, $\angle C$, $\angle AOC$.

2. Хорды MN и KP пересекаются в точке T. Найдите BN, если $KT = 6$ см, $PT = 8$ см, а длина MT в 3 раза меньше длины NT.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O, $\angle AOC = 80°$, $\angle C : \angle A = 3 : 4$. Найдите градусные меры дуг AB, AC, BC.

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. $AE = 8$ см, $BE = 6$ см, $CD = 16$ см. В каком отношении точка E делит отрезок CD?

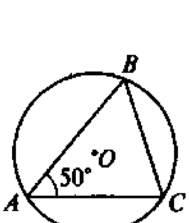


Рис. 8.64

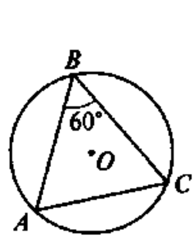


Рис. 8.65

Вариант 2

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O, $\angle A = 60°$, $\angle AOB : \angle AOC = 3 : 5$. Найдите неизвестные углы треугольника.

2. Хорды MN и PT пересекаются в точке K. $ME = 8$ см, $NE = 9$ см, $PT = 18$ см. В каком отношении точка K делит отрезок PT?

III уровень сложности

Вариант 1

1. Окружность с центром O касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC в точках M, N, K соответственно. Найдите $\smile MN$, $\smile NK$, $\smile MK$ и углы ΔMNK, если $\angle ABC = 62°$, $\angle ACB = 68°$.

2. Точка C делит хорду AB на отрезки 15 см и 8 см. Найдите диаметр окружности, если расстояние от точки C до центра окружности равно 1 см.

Вариант 2

1. Окружность с центром O касается сторон MN, NK и MK треугольника MNK в точках A, B, C соответственно. Найдите $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile AC$ и углы треугольника ABC, если $\angle MNK = 72°$, $\angle NKM = 64°$.

2. Хорда AB делится точкой C на отрезки 9 см и 12 см. Найдите расстояние от центра окружности до точки С, если диаметр окружности равен 24 см.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равна величина центрального угла?
2. Чему равна величина вписанного угла?
3. Сформулируйте теорему о вписанном угле и следствия из нее.
4. Сформулируйте теорему об отрезках пересекающихся хорд.

Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 91 (рабочая тетрадь), № 661, 663, 673; II уровень сложности: № 661, 663, 672, 673.

Урок 58. Свойство биссектрисы угла

Основные дидактические цели урока: рассмотреть свойство биссектрисы угла и показать его применение при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. $\angle B = 52°$, $\angle C = 75°$, $\angle BOC = 100°$.
2. $CD = 15$ см.

Вариант 2

1. $\angle C = 70°$, $\angle A = 50°$, $\angle AOC = 120°$.
2. $MN = 16$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. $\smile AC = 80°$, $\smile AB = 120°$, $\smile BC = 160°$.
2. 1 : 3.

Вариант 2

1. $\angle C = 45°$, $\angle B = 75°$.
2. 1 : 2.

III уровень сложности

Вариант 1

1. $\smile MK = 130°$, $\smile MN = 118°$, $\angle NK = 112°$, $\angle MNK = 65°$, $\angle KMN = 56°$, $\angle MKN = 59°$.
2. 22 см.

Вариант 2

1. $\smile AB = 108°$, $\smile BC = 116°$, $\smile AC = 136°$, $\angle ACB = 54°$, $\angle ABC = 68°$, $\angle BAC = 58°$.
2. 6 см.

3. Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1) Рис. 8.66.

Доказать: $BC = DC$.

2) Рис. 8.67.

Доказать: точка M равноудалена от точек A и B.

3) Рис. 8.68.

Доказать: AC – биссектриса $\angle BAD$.

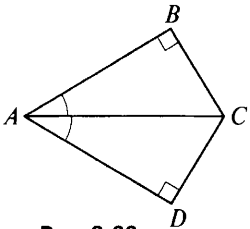


Рис. 8.66

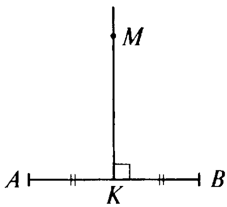


Рис. 8.67

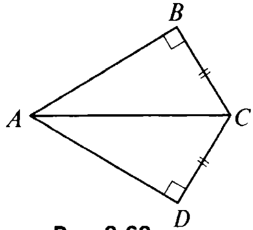


Рис. 8.68

III. Работа по теме урока

1. Рассмотреть теорему, выражающую свойство биссектрисы угла.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает одно из заданий. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Задание для первой группы. Выделить условие и заключение теоремы.

Задание для второй группы. Доказать теорему.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.69) и запись:

Теорема: Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

План-конспект доказательства теоремы:

Дано: AD – биссектриса угла A, $M \in AD$, $MB \perp AP$, $MC \perp AK$.

Доказать: $BM = CM$.

Доказательство:

а) $\Delta ABM = \Delta ACM$ ($\angle ABM = \angle ACM = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, AM – общая сторона).

б) $BM = CM$.

2. Рассмотреть теорему, обратную свойству биссектрисы угла.

Задание для третьей группы. Сформулировать теорему, обратную свойству биссектрисы угла, и выяснить справедливость полученного утверждения.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.70) и запись:

Теорема: Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

План-конспект доказательства теоремы:

Дано: M лежит внутри угла BAC, $MB = MC$, $MB \perp AB$, $MC \perp AC$.

Доказать: AM – биссектриса $\angle BAC$.

Доказательство: $\Delta ABM = \Delta ACM$ по гипотенузе и катету ($\angle ABM = \angle ACM = 90°$, так как $MB \perp AB$ и $MC \perp AC$, AM – общая гипотенуза, $MB = MC$ по условию), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, т. е. AM – биссектриса $\angle BAC$.

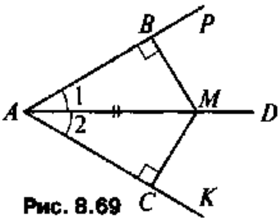


Рис. 8.69

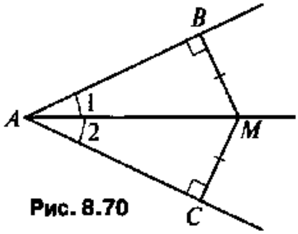


Рис. 8.70

3. Рассмотреть следствие из теоремы о биссектрисе угла. (Доказывает учитель.)

Следствие: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы ΔABC.

Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = 0$.

Доказательство: Пусть $AA_1 \cap BB_1$ в точке O (рис. 8.71). Так как точка O лежит на биссектрисе AA_1, то она равноудалена от сторон $\angle BAC$, т. е. $OM = ON$.

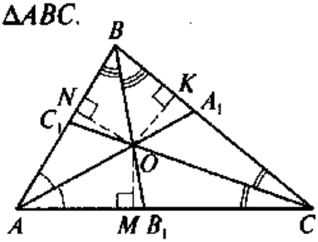


Рис. 8.71

Так как точка O лежит на биссектрисе BB_1, то она равноудалена от сторон $\angle ABC$, т. е. $ON = OK$.

Так как $OM = ON$ и $ON = OK$, то $OM = OK$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB, т. е. CO – биссектриса $\angle ACB$, следовательно, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 95 (устно).

2) Решить задачи № 97, 98 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 97

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 8.72), следовательно, луч BM – биссектриса угла ABC, и $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC$.

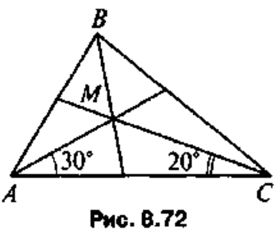


Рис. 8.72

По условию задачи лучи AM и CM – биссектрисы углов A и C, поэтому $\angle A = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle C = 2 \cdot 20° = 40°$.

Тогда, $\angle B = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (60° + 40°) = 80°$, значит, $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$.

Ответ: $\angle ABM = 40°$.

Задача № 98

По условию задачи луч KO является биссектрисой угла CKE, поэтому точка O равноудалена от сторон этого угла, т. е. от прямых KC и KE.

Расстоянием от точки O до прямой CK является длина перпендикуляра OM, проведенного из точки O к этой прямой, т. е. расстояние от точки O до прямой CK равно 7 см. Поэтому расстояние от точки O до прямой KE равно 7 см.

Ответ: 7 см.

2. Решить задачи № 676 (а), 678 (а), 674 (самостоятельно).

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Задача № 676 (а)

Краткое решение: $OB = OC = r = 5$ см, $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ по свойству касательной (рис. 8.73). Таким образом, AO – биссектриса $\angle BAC$, т. е. $\angle 1 = \angle 2 = 30° \Rightarrow AO = 2OB = 10$ см.

Ответ: 10 см.

Задача № 678 (а)

Краткое решение: Так как AM и BM – биссектрисы (рис. 8.74), то $\angle 1 = \angle 2 = x$, $\angle 3 = \angle 4 = y$, тогда в ΔABM $x + y + 136° = 180° \Rightarrow x + y = 44°$. $\angle A + \angle B = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 44° = 88°$.

В ΔABC $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 88° = 92°$.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке $\Rightarrow$ CM также биссектриса, т. е. $\angle ACM = \angle BCM = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2} \cdot 92° = 46°$.

Ответ: $\angle ACM = \angle BCM = 46°$.

Задача № 674

Краткое решение: Так как OM – биссектриса $\angle BOA$ (рис. 8.75), то точка M равноудалена от сторон угла BOA, т. е. $BM = AM \Rightarrow \Delta ABM$ – равнобедренный.

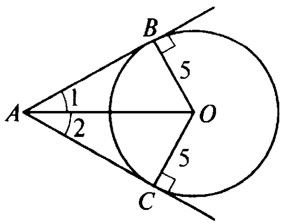


Рис. 8.73

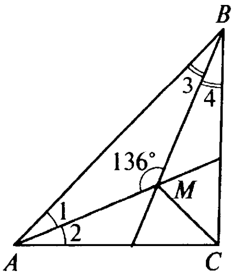


Рис. 8.74

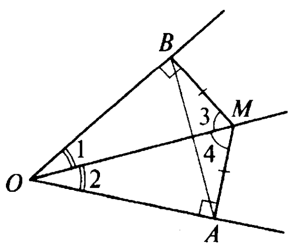


Рис. 8.75

$\Delta OBM = \Delta OAM$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$, т. е. MO – биссектриса $\angle BMA$.

В равнобедренном ΔABM биссектриса MK, проведенная к его основанию, является его высотой $\Rightarrow MK \perp AB \Rightarrow MO \perp AB$.

3. Решить дополнительную задачу.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) AD – биссектриса, $CD = 6$ см, $AB = 15$ см. Найдите площадь треугольника ADB.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(За решение дополнительной задачи выставляется отдельная отметка.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте свойство биссектрисы угла и ее следствие.
2. Сформулируйте теорему, обратную свойству биссектрисы угла.

Домашнее задание

1. П. 74, вопросы 15, 16 (учебник, с. 185).
2. Решить задачи № 675, 676 (б), 677, 678 (б).

Урок 59. Серединный перпендикуляр

Основные дидактические цели урока: ввести понятие серединного перпендикуляра и рассмотреть теорему о серединном перпендикуляре; показать применение теоремы о серединном перпендикуляре при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

(Три ученика готовят доказательства теорем у доски. Заслушать после решения задачи в рабочей тетради.)

1. Теоретический опрос.

1) Сформулировать и доказать теорему о биссектрисе угла.

2) Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме о биссектрисе угла.

3) Сформулировать и доказать следствие из теоремы о биссектрисе угла.

2. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 96 (рис. 8.76) (устно).

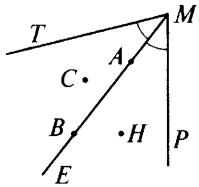


Рис. 8.76

1) Точка A лежит на биссектрисе ME угла TMP, поэтому она равноудалена от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A верно.

2) Точка B лежит на биссектрисе ME угла TMP, поэтому она равноудалена от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B неверное.

3) Если бы точка H была равноудалена от сторон угла TMP, то она лежала бы на биссектрисе ME этого угла. Но точка H не лежит на биссектрисе угла TMP. Следовательно, данное утверждение о точке H неверное.

4) Если бы точка C была равноудалена от сторон угла TMP, то она лежала бы на биссектрисе этого угла.

Следовательно, данное утверждение о точке C верное.

3. Решение задач по готовым чертежам.

1) *Дано:* $BE = 4$, $BM = 5$ (рис. 8.77).

Найти: MK.

2) Рис. 8.78.

Найти: $\angle ADB$.

3) *Дано:* $AB = BC$ (рис. 8.79).

Доказать: $BM \perp AC$.

4) *Дано:* $OE = 5$ (рис. 8.80).

Найти: расстояние от точки O до прямых AB и BC.

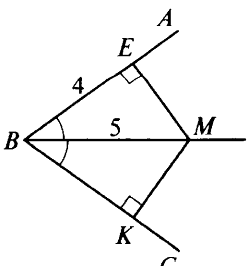


Рис. 8.77

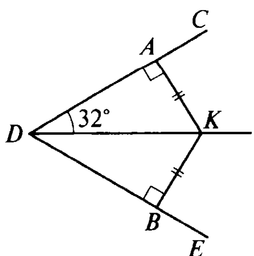


Рис. 8.78

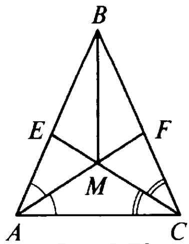


Рис. 8.79

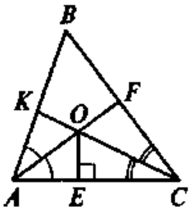


Рис. 8.80

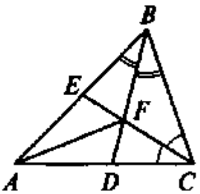


Рис. 8.81

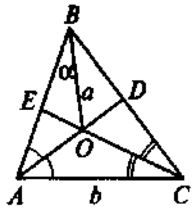


Рис. 8.82

5) *Дано:* $AC = 14$, $AB = 16$, $S_{ACF} = 28$, $BC = 12$ (рис. 8.81).

Найти: S_{ABF}, S_{BCF}.

6) Рис. 8.82.

Найти: S_{AOC}.

(Менее подготовленные ученики решают задачи № 1–4, остальные – задачи № 3–6. Учитель индивидуально проверяет решение задач № 675, 677.)

Задача № 675

Краткое решение: Так как окружности имеют общую касательную в точке A (рис. 8.83), то $O_1A \perp p$ и $O_2A \perp p \Rightarrow O_1O_2 = O_1A + O_2A$, т. е. A лежит на O_1O_2.

$O_1K \perp OK$, $O_1M \perp OM$, $O_1K = O_1M = r_1 \Rightarrow O_1$ лежит на биссектрисе $\angle O$.

$O_2N \perp ON$, $O_2F \perp OF$, $O_2N = O_2F = r_2 \Rightarrow O_2$ лежит на биссектрисе $\angle O$.

Так как O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$, $A \in O_1O_2$, то O_1, $O_2 \in OA$.

Задача № 677

Краткое решение: Опустим перпендикуляры OM, ON и OK к сторонам AC, AB, CB (рис. 8.84).

$\Delta OMC = \Delta ONC$ по гипотенузе и острому углу (OC – общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle M = \angle N = 90°$) $\Rightarrow OM = ON$.

$\Delta OBN = \Delta OBK$ по гипотенузе и острому углу (OB – общая гипотенуза, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle N = \angle K = 90°$) $\Rightarrow ON = OK$.

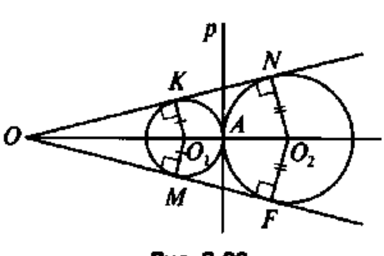


Рис. 8.83

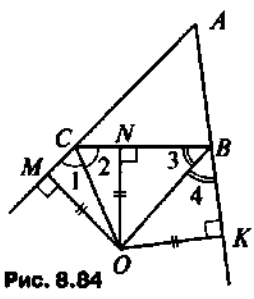


Рис. 8.84

Так как $OM = ON = OK$, $OM \perp CM$, $ON \perp CB$, $OK \perp BK$, то окружность с центром O и радиусом ON касается прямых CM, CB и BK.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие серединного перпендикуляра.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.85) и запись:

Определение: Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Прямая a – серединный перпендикуляр к отрезку AB, если:

1) $a \perp AB$;

2) $AO = BO$ ($O = a \cap AB$).

2. Рассмотреть теорему о серединном перпендикуляре.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает одно из заданий. На обсуждение дается 5 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Теорема: Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. *Обратно:* каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

***Задание для первой группы.** К первой части теоремы:*

Дано: M – произвольная точка прямой a, a – серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 8.86).

Доказать: $MA = MB$.

***Задание для второй группы.** Ко второй части теоремы:*

Дано: $MA = MB$, прямая a – серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 8.87).

Доказать: точка M лежит на прямой a.

На доске и в тетрадях запись:

План доказательства первой части:

1) Если $M \in AB$, то M совпадает с точкой O, следовательно, $MA = MB$.

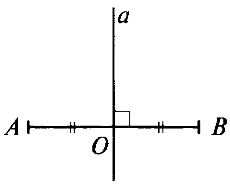


Рис. 8.85

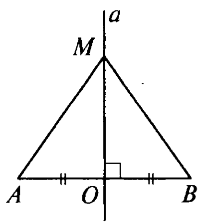


Рис. 8.86

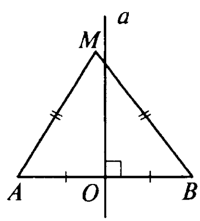


Рис. 8.87

2) Если $M \notin AB$, то $\Delta AMO = \Delta BMO$ по двум катетам ($OA = BO$, MO – общий катет), следовательно, $MA = MB$.

План доказательства второй части:

1) ΔAMB – равнобедренный, следовательно, MN (высота ΔAMB) – медиана ΔAMB, отсюда $AH = HB$.

2) $AH = HB$, $AO = OB$; H, $O \in AB$, следовательно, H и O совпадают.

3) Через точку O к прямой AB можно провести только один перпендикуляр, т. е. MN и a совпадают, следовательно, $M \in a$.

3. Сформулировать и доказать следствие из теоремы о серединном перпендикуляре.

(Доказывает учитель.)

Следствие: Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство: Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекаются в точке O (рис. 8.88). (Они не могут не пересекаться, так как в этом случае $MO \parallel NO$, т. е. $AB \parallel BC$, что невозможно.)

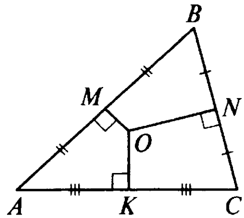


Рис. 8.88

По свойству серединного перпендикуляра имеем: $OA = OB$ и $OB = OC$, отсюда $OA = OC$, следовательно, по второй части теоремы о серединном перпендикуляре точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, т. е. серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачу № 99 (устно).

2) Решить задачу № 100 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 99

Прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку, если она проходит через середину этого отрезка и перпендикуляра к нему.

По условию задачи $BM = MC$, но прямая AM не перпендикулярна к отрезку BC, так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и высотой треугольника ABC, а тогда были бы равны стороны AB и AC, что неверно. Следовательно, прямая AM не является серединным перпендикуляром к стороне BC.

По условию задачи $BT \perp AC$, то $AT \neq CT$, так как в противном случае отрезок BT был бы высотой и медианой треугольника

ABC, а тогда были бы равны стороны AB и BC, что неверно. Следовательно, прямая BT не является серединным перпендикуляром к стороне AC.

По условию задачи $\angle ACO = \angle BCO$ и $AC = BC$, т. е. отрезок CO является биссектрисой равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и высотой. Следовательно, прямая CO проходит через середину отрезка AB и перпендикуляра к этому отрезку, т. е. является серединным перпендикуляром к стороне AB.

Ответ: серединным перпендикуляром к стороне треугольника ABC является прямая CO.

Задача № 100

Доказательство: Так как прямая p – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $AO = OB$. Аналогично, так как прямая q – серединный перпендикуляр к отрезку BC, то $OB = OC$.

Итак, $AO = OB = OC$, т. е. $AO = OC$, что и требовалось доказать.

2. Решить задачи № 680 (а), 686.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 680 (а)

Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, следовательно, точка D принадлежит серединному перпендикуляру, проведенному к стороне BC. Точка D лежит на стороне BC и на серединном перпендикуляре, проведенном к ней, значит, она является серединой стороны BC.

Наводящие вопросы.

– Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку.
– Каково взаимное расположение серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника?
– Какой вывод следует из того, что точка D лежит на стороне BC и на серединном перпендикуляре, проведенном к ней?

Задача № 686

(Прочитать решение задачи по учебнику, решение задачи обсудить.)

Вопросы для обсуждения.

– Почему точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB?
– На основании какой теоремы можно сказать, что если точка M_1 равноудалена от концов отрезка AB, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему?
– Почему $M_1M_2 \perp AB$?

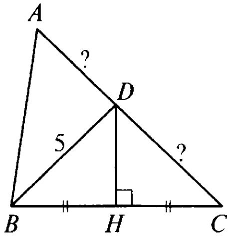


Рис. 8.89

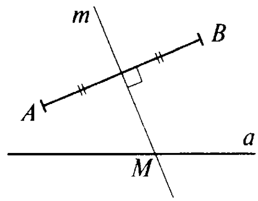


Рис. 8.90

3. Решить задачи № 679 (а), 687 (самостоятельно).

Задача № 679 (а)

Краткое решение: $\Delta BDH = \Delta CDH$ по двум катетам (рис. 8.89) $\Rightarrow$ $BD = CD = 5$ см $\Rightarrow AD = AC - 5 = 3{,}5$ см.

Ответ: $AD = 3{,}5$ см, $CD = 5$ см.

Задача № 687

Краткое решение:

Построение:

1) Построить отрезок AB и серединный перпендикуляр m к нему (рис. 8.90).

2) $m \cap a = M$. M – искомая точка.

Доказательство: m – серединный перпендикуляр $\Rightarrow MA = MB$. $M \in a \Rightarrow M$ – точка прямой a, равноудаленная от A и B.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?
2. Сформулируйте теорему о серединном перпендикуляре.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме о серединном перпендикуляре.
4. Сформулируйте следствие теоремы о серединном перпендикуляре.

Домашнее задание

1. П. 75, вопросы 17, 18, 19 (учебник, с. 185).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 102 (рабочая тетрадь), № 679 (б), 680 (б), 681; II уровень сложности: № 679 (б), 680 (б), 681.
3. Решить дополнительную задачу.

В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекаются в точке D, $DC = 5$ см. Найдите расстояния от точки D до сторон треугольника, если периметр треугольника ABC равен 18 см, $AB : BC : AC =$ $= 4 : 3 : 2$.

Урок 60. Теорема о точке пересечения высот треугольника

Основные дидактические цели урока: рассмотреть теорему о точке пересечении высот треугольника и показать ее применение при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика готовят доказательства теорем у доски. Доказательства теорем проверяет учитель, работая индивидуально с учеником.)

1) Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

2) Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 102 (устно).)

3. Решить задачу № 101 (рабочая тетрадь).

Задача № 101

а) Точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CE, следовательно, она равноудалена от концов этого отрезка, т. е. данное утверждение о точке A верно.

б) Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CE, поэтому она равноудалена от концов отрезка CE, а значит, расстояния от нее до точек C и E равны, т. е. данное утверждение о точке M неверное.

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E, то она лежала бы на серединном перпендикуляре к отрезку CE, но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H неверное.

г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E, то она лежала бы на серединном перпендикуляре к отрезку CE, что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T верно.

(Учащиеся сдают рабочие тетради на проверку.)

4. Решение задач по готовым чертежам (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

(Учитель проверяет решение дополнительной домашней задачи.)

1) *Дано:* $P_{ABO} = 8$ см (рис. 8.91).
Найти: P_{ABC}.
2) Рис. 8.92.
Найти: BO.
3) Рис. 8.93.
Найти: S_{AOC}, S_{AOB}.
4) *Дано:* $AC = 24$, $S_{AOC} = 60$ (рис. 8.94).
Найти: BO.
5) *Дано:* $AC = 10$, $BC = 8$ (рис. 8.95).
Найти: KE.

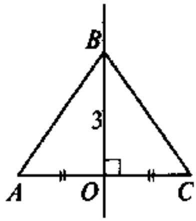


Рис. 8.91

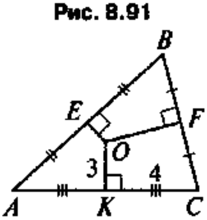


Рис. 8.92

Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $P_{ABC} = 10$ см.
2) $BO = 5$.
3) $S_{AOC} = 25\sqrt{3}$, $S_{AOB} = 48$.
4) $BO = 13$.
5) $KE = 3$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решена одна задача.

III. Работа по теме урока

– Какие элементы треугольника пересекаются в одной точке? (***Биссектрисы треугольника, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, медианы треугольника.***)

– В каком треугольнике совпадают точка пересечения биссектрис, точка пересечения медиан, точка пересечения серединных перпендикуляров? (***В равностороннем.***)

– Пересекаются ли высоты треугольника в одной точке?

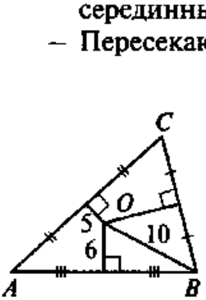


Рис. 8.93

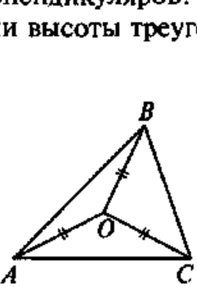


Рис. 8.94

Рис. 8.95

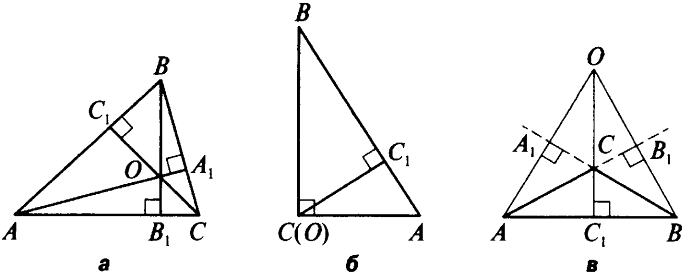


Рис. 8.96

Возможные варианты ответов:

а) да;

б) только в остроугольном;

в) в остроугольном и прямоугольном.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 8.96):

O – точка пересечения высот ΔABC или их продолжений.

1. Сформулировать и доказать теорему о точке пересечения высот треугольника.

Теорема: Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – высоты ΔABC.

Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.

Доказательство:

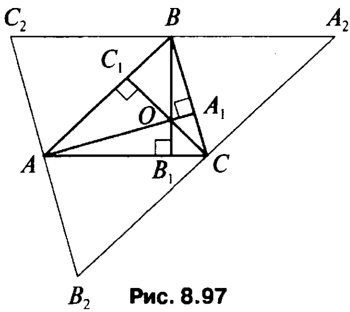


Рис. 8.97

1) Проведем через точки $A_2B_2C_2$ прямые, параллельные AB, BC, AC (рис. 8.97).

2) $AB \parallel A_2B_2$, $AC \parallel A_2C_2 \Rightarrow ABA_2C$ – параллелограмм, следовательно, $AB = A_2C$, $AC = BA_2$.

3) $ABCB_2$ – параллелограмм, следовательно, $AB_2 = BC$, $AB = CB_2$.

4) AC_2BC – параллелограмм, следовательно, $AC = C_2B$, $AC_2 = BC$.

5) $AB = A_2C = CB_2$, следовательно, C – середина A_2B_2.

6) $AC = CB_2 = BA_2$, следовательно, B – середина C_2A_2.

7) $BC = C_2A = AB_2$, следовательно, A – середина B_2C_2.

8) $AA_1 \perp BC$, $BC \parallel B_2C_2$, A – середина B_2C_2, следовательно, AA_1 – серединный перпендикуляр к стороне B_2C_2 $\Delta A_2B_2C_2$.

9) $CC_1 \perp AB$, $AB \parallel A_2B_2$, C – середина A_2B_2, следовательно, CC_1 – серединный перпендикуляр к стороне A_2B_2 $\Delta A_2B_2C_2$.

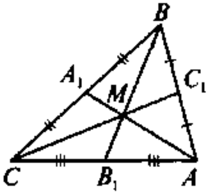


Рис. 8.98

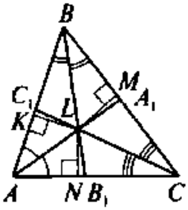


Рис. 8.99

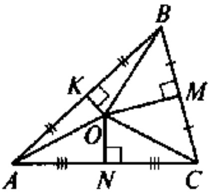
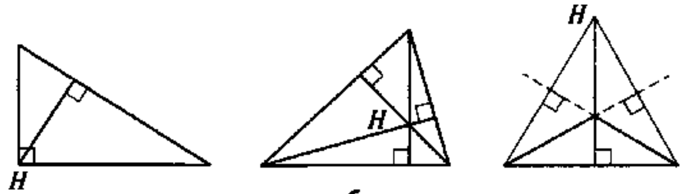


Рис. 8.100



а б в

Рис. 8.101

10) $BB_1 \perp AC$, $AC \parallel A_2C_2$, B – середина A_2C_2, следовательно, BB_1 – серединный перпендикуляр к стороне A_2C_2 $\Delta A_2B_2C_2$.

11) Серединные перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 треугольника $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, а это значит, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Ввести понятие четырех замечательных точек треугольника.

Четыре замечательные точки треугольника

1) Точка пересечения медиан (рис. 8.98).

$\frac{AM}{A_1M} = \frac{BM}{B_1M} = \frac{CM}{C_1M} = \frac{2}{1}$.

2) Точка пересечения биссектрис (рис. 8.99).

$LK = LM = LN$.

3) Точка пересечения серединных перпендикуляров (рис. 8.100).

$AO = BO = CO$.

4) Точка пересечения высот – H (рис. 8.101).

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 103 (рабочая тетрадь).

Задача № 103

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку O. С помощью линейки проведем прямую CO и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой AB. Отрезок CT – искомая высота ΔABC.

2. Решить задачи № 685, 683.

Задача № 685

Проведем прямую CM, $CM \cap AB = D$ (рис. 8.102). Высоты треугольника пересекаются в одной точке, значит, CD – высота ΔABC, т. е. $CD \perp AB$. ΔABC – равнобедренный с основанием AB, поэтому высота CD является медианой, т. е. $AD = DB$. Так как $CD = AB$, $AD = DB$, то CD (и CM) серединный перпендикуляр к стороне AB.

Наводящие вопросы.

– Пусть $CM \cap AB = D$. Чем является CD для треугольника ABC?
– Каким свойством обладает высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию?

Задача № 683

Если бы AM было высотой, то ΔABM и ΔACM (рис. 8.103) были бы прямоугольными и равными по двум катетам, значит, были бы равны стороны AB и AC треугольника ABC, что противоречит условию задачи. Следовательно, AM не является высотой.

Наводящие вопросы.

– Какие изменения произошли бы в треугольнике ABC, если бы медиана AM являлась высотой?
– Как называется данный способ решения задач?

3. Решить задачи № 684, 682, 688 (самостоятельно).

Задача № 684

Краткое решение: Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке (рис. 8.104) $\Rightarrow$ CM – биссектриса $\angle ACB$. Пусть $CM \cap AB = D$. Тогда CD – биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию $\Rightarrow$ CD – высота, т. е. $CD \perp AB \Rightarrow CM \perp AB$.

Задача № 682

Краткое решение: Так как O – середина $AB \Rightarrow CO$ – медиана и высота равнобедренного ΔABC с основанием AB, а DO – медиана и высота равнобедренного ΔABD с основанием AB (рис. 8.105). Так как $CO \perp AB$, $DO \perp AB$, то C, D, O лежат на одной прямой, т. е. $O \in CD$.

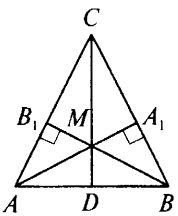


Рис. 8.102

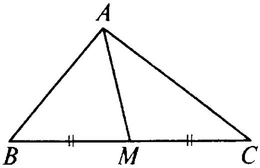


Рис. 8.103

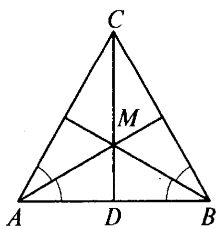


Рис. 8.104

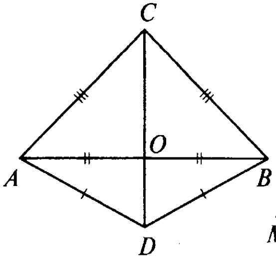


Рис. 8.105

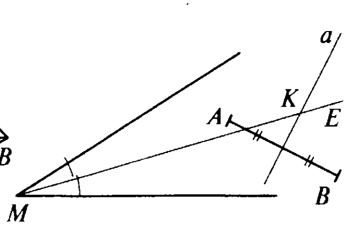


Рис. 8.106

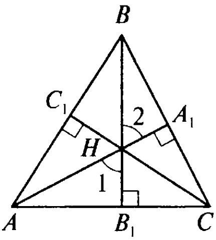


Рис. 8.107

Задача № 688

Построение:

1) Построить биссектрису ME угла M (рис. 8.106).

2) Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB – прямую a.

3) $a \cap ME = K$.

4) K – искомая точка.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

4. Решить дополнительные задачи.

(За решение хотя бы одной дополнительной задачи ставится дополнительная оценка или добавляется 1 балл к оценке за урок.)

Задача 1

В ΔABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Найдите высоту, проведенную к стороне AC, если $HA_1 = 3$, $BA_1 = 4$, $AH = 4$.

Решение: $\Delta AHB_1 \sim \Delta BHA_1$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle AB_1H = \angle BA_1H = 90°$) (рис. 8.107), следовательно, $\frac{AH}{BH} = \frac{B_1H}{A_1H}$, отсюда $B_1H = \frac{AH \cdot A_1H}{BH}$.

ΔA_1BH – прямоугольный, то теореме Пифагора $BH^2 = A_1H^2 + BA_1^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, отсюда $BH = 5$, $B_1H = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$. $BB_1 = BH + B_1H = 5 + 2{,}4 = 7{,}4$.

Ответ: 7,4.

Задача 2

Найдите углы треугольника, если его стороны из точки пересечения серединных перпендикуляров видны под углами 100°, 140°, 120°.

Решение: MO, NO, OK – серединные перпендикуляры (рис. 8.108), следовательно, $AO = BO = CO$, т. е. ΔAOB, ΔBOC, ΔAOC – равнобедренные и OM, ON и OK являются их биссектрисами.

$\angle AOB = 100°$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2 = (180° - 100°) : 2 = 40°$,

$\angle BOC = 120°$, следовательно, $\angle 3 = \angle 4 = (180° - 120°) : 2 = 30°$,

$\angle AOC = 140°$, следовательно, $\angle 5 = \angle 6 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

$\angle ABC = \angle 2 + \angle 3 = 70°$, $\angle BAC = \angle 1 + \angle 6 = 60°$, $\angle ACB = \angle 4 + \angle 5 = 50°$.

Ответ: 50°, 60°, 70°.

Задача 3

В ΔMNK $\angle MNK$ тупой. Высоты MD и KE пересекаются в точке Q, $QN = 5$, $MK = 10$. Найдите площадь четырехугольника $MNQK$.

Решение: $S_{MNQK} = S_{MQK} - S_{MNK} = MK \cdot QP : 2 - MK \cdot NP : 2 = MK \cdot (QP - NP) : 2 = MK \cdot NQ : 2 = 25$ (рис. 8.109).

Ответ: 25.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие точки треугольника называются замечательными?
2. Какое свойство точки пересечения медиан (биссектрис, серединных перпендикуляров) треугольника вам знакомо?
3. Где расположена точка пересечения высот треугольника?

Домашнее задание

Решить проверочную работу (дифференцированная работа).

I уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $\angle CAB = 42°$ (рис. 8.110).

Найти: $\angle ACO$.

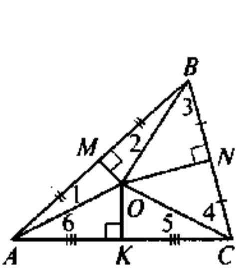


Рис. 8.108

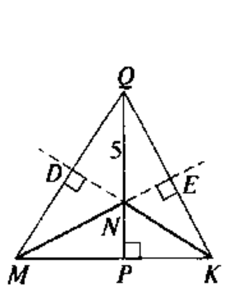


Рис. 8.109

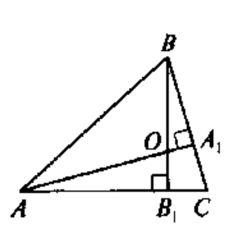


Рис. 8.110

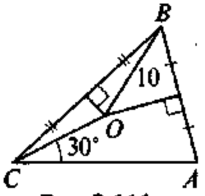


Рис. 8.111

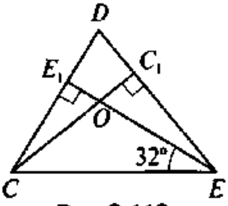


Рис. 8.112

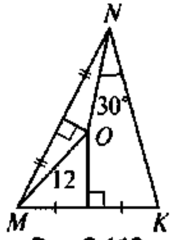


Рис. 8.113

2. В треугольнике MNK биссектрисы пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до стороны $MN = 6$ см, $NK = 10$ см. Найдите площадь треугольника NOK.

Вариант 2

1. Рис. 8.111.

Найти: расстояние от точки O до стороны AC.

2. В треугольнике MNK медианы MP и NE пересекаются в точке O и равны 12 и 15 см соответственно. Найдите площадь треугольника MOE, если $MP \perp NE$.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 8.112.

Найти: $\angle CDO$.

2. В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и равны 15 см и 18 см соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $\angle BOC = 90°$.

Вариант 2

1. Рис. 8.113.

Найти: S_{NOK}.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOC, если $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. *Дано:* $\angle AOB = 120°$, $AB = 12$ (рис. 8.114).

Найти: OC.

2. Во внутренней области треугольника ABC взята точка O, равноудаленная от его сторон. Найдите угол AOC, если $\angle ABO = 39°$.

Вариант 2

1. *Дано:* $NN_1 = N_1K$ (рис. 8.115).

Найти: $\angle OMN_1$.

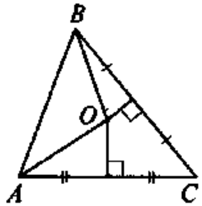


Рис. 8.114

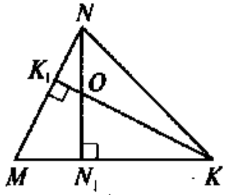


Рис. 8.115

2. В ΔABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OA, если $BB_1 = 36$ см, $CC_1 = 15$ см.

Урок 61. Вписанная окружность

Основные дидактические цели урока: ввести понятия вписанной и описанной окружностей; рассмотреть теорему об окружности, вписанной в треугольник; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в проверочной работе.

1) Провести общий анализ проверочной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам проверочной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы к задачам домашней проверочной работы:

I уровень сложности

Вариант 1	***Вариант 2***
1. 48°.	1. 5.
2. 30 см^2.	2. 20 см^2.

II уровень сложности

Вариант 1	***Вариант 2***
1. 32°.	1. $18\sqrt{3}$.
2. $23 + 4\sqrt{34} + 4\sqrt{61}$ см.	2. 4 : 3.

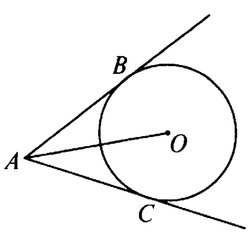


Рис. 8.116

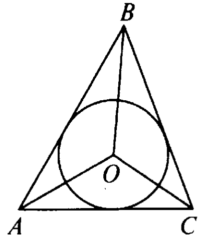


Рис. 8.117

III уровень сложности

Вариант 1

1. $4\sqrt{3}$.
2. 129°.

Вариант 2

1. 45°.
2. 26 см.

2. Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1) *Дано:* AB, AC – касательные, B, C – точки касания (рис. 8.116). $\angle BAC = 56°$, $OC = 4$ см.

Найти: $\angle OAB$, OB.

2) *Дано:* AB, BC, AC – касательные, $\angle BOC = 120°$, $\angle ABO = 25°$, $\angle AOC = 115°$ (рис. 8.117).

Найти: углы треугольника AOB.

Доказать: O – точка пересечения биссектрис ΔABC.

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие окружности, вписанной в многоугольник.

Определение: Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности.

$ABCDE$ – описанный около окружности с центром O пятиугольник (рис. 8.118). Окружность с центром O вписана в пятиугольник $ABCDE$. AB, BC, CD, DE, AE касаются окружности.

Окружность с центром Q не вписана в четырехугольник $ABCD$ (рис. 8.119), так как сторона CD не касается окружности.

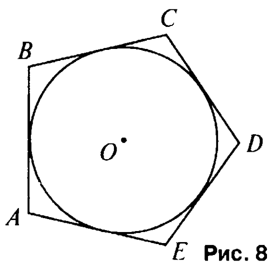


Рис. 8.118

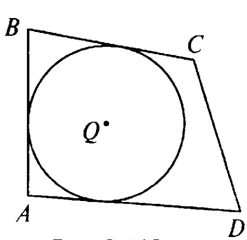


Рис. 8.119

2. Сформулировать и доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема: В любой треугольник можно вписать окружность.

(Для доказательства теоремы учащиеся решают задачу на построение самостоятельно, затем обсуждают варианты решений.)

Задача. В данный треугольник впишите окружность.

Наводящие вопросы.

– Каково взаимное расположение сторон треугольника и окружности?
– Укажите геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла A, B, C.
– Как найти центр вписанной в треугольник окружности?
– Чему равен радиус вписанной в треугольник окружности?
– Докажите, что данная окружность является вписанной в треугольник.

(С доказательством теоремы учащиеся могут ознакомиться дома.)

3. Рассмотреть замечание № 1 (учебник, с. 179).

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

1) Решить задачи № 104 (устно).

2) Решить задачу № 107.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

3) Решить задачу № 108 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 108

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E – точками касания сторон треугольника и окружности (рис. 8.120). Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OH \perp AC$, следовательно, отрезок OH – высота треугольника AOC. Аналогично отрезок OM – высота треугольника BOC, отрезок OE – высота треугольника AOB. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OE$. Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OM$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OH$. Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot OE + BC \cdot OM + AC \cdot OH) = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r) = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} \cdot r = 60 : 2 \cdot 4 = 120$ см^2.

Ответ: 120 см^2.

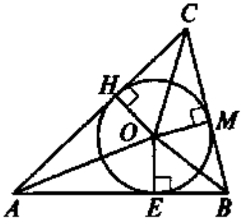


Рис. 8.120

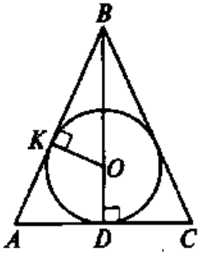


Рис. 8.121

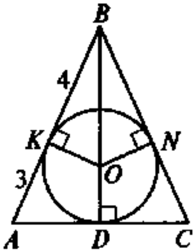


Рис. 8.122

2. Разобрать решение задачи № 690.

Задача № 690

Решение: $\Delta ABD \sim \Delta OBK$ по двум углам ($\angle K = \angle D$, $\angle B$ – общий) (рис. 8.121), следовательно, $AB : OB = BD : BK = AD : OK$.

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда так как $BO : OD = 12 : 5$, то $BO = 12x$, $OD = 5x$, $BD = 17x$. $KO = OD = 5x$. $AB = 60$ см, отсюда $\frac{60}{12x} = \frac{17x}{BK} = \frac{AD}{5x}$, следовательно, $AD = \frac{60 \cdot 5x}{12x} =$ $= 25$ см, т. е. $AC = 50$ см.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о треугольниках ABD и OBK?

– Сформулируйте свойство высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника.

3. Решить задачи № 691, 693 (а) (самостоятельно).

Задача № 691

Краткое решение: Так как AB, BC, AC – касательные, K, N, D – точки касания (рис. 8.122), то $AK = AD$, $CD = CN$, $BK = BN$. Так как $AB = BC$, то $CN = CD = 3$ см $\Rightarrow P_{ABC} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20$ см.

Ответ: 20 см.

Задача № 693 (а)

Решение: Так как гипотенуза равна 26 см (рис. 8.123), то $AN = x$ см, $BN = (26 - x)$ см. $r = 4$, следовательно, $MO = MC = CK = KO = 4$ см (так как $MO = OK = 4$ см, $MO \perp BC$, $OK \perp AC$, отсюда $CMOK$ – квадрат).

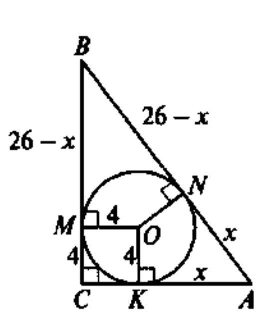


Рис. 8.123

AC и BC – касательные, следовательно, $AK = AN = x$ см, $BM = BN = 26 - x$ см.

$P_{ABC} = (x + 4) + (4 + 26 - x) + 26 = 34 + 26 = 60$ см.

Ответ: 60 см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – одна из задач решена правильно, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

4. Решить дополнительную задачу.

В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания, лежащая на гипотенузе, делит ее на отрезки, равные 4 и 6 см. Найдите площадь данного треугольника.

Решение: $MONC$ – квадрат (см. задачу № 693 (а)) (рис. 8.124).

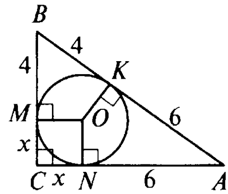


Рис. 8.124

Пусть $MC = CN = x$ см. $BM = BK = 4$ см, $AK = AN = 6$ см как отрезки касательных, проведенные из одной точки.

ΔABC – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е. $(x + 4)^2 + (x + 6)^2 = 10^2$, откуда $x_1 = -12$; $x_2 = 2$.

Так как $x > 0$, то $MC = CN = 2$ см, следовательно, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = 8 : 2 \cdot 6 = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

(За решение дополнительной задачи ставится дополнительная оценка или добавляется 1 балл к оценке за урок.)

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая окружность называется вписанной, описанной?
2. Сформулируйте теорему об окружности, вписанной в треугольник.
3. Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник?

Домашнее задание

1. П. 77, вопросы 21, 22 (учебник, с. 185).
2. Решить задачи № 689, 692, 693 (б), 694.

Урок 62. Свойство описанного четырехугольника

Основные дидактические цели урока: совершенствовать навыки решения задач; рассмотреть свойство описанного четырехугольника и показать его применение при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика готовят доказательства теорем у доски. Заслушать после проверки ответов теста.)

1) Сформулировать и доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

2) Доказать, что в треугольник можно вписать только одну окружность.

2. Тест с последующей самопроверкой.

(Учащиеся пишут ответы на двух листочках, один из которых сдают учителю на проверку.)

Вариант 1

1. Центр вписанной в треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его:

а) медиан;

б) биссектрис;

в) серединных перпендикуляров.

2. Центр вписанной в треугольник окружности равноудален от:

а) сторон;

б) углов;

в) вершин треугольника.

3. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его медиан. Этот треугольник:

а) прямоугольный;

б) равнобедренный;

в) равносторонний.

4. Окружность называется вписанной в многоугольник, если:

а) все его стороны касаются окружности;

б) все его вершины лежат на окружности;

в) все его стороны имеют общие точки с окружностью.

Вариант 2

1. Радиус вписанной в треугольник окружности равен расстоянию от центра окружности до:

а) сторон треугольника;

б) вершин треугольника;

в) углов треугольника.

2. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности может лежать:

а) на любой из его высот;

б) на одной из его медиан;

в) на любом из его серединных перпендикуляров.

3. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его биссектрис. Этот треугольник может быть:

а) произвольным;

б) только равносторонним;

в) только прямоугольным.

4. Многоугольник называется описанным около окружности, если:

а) окружность имеет общие точки с его сторонами;

б) окружность проходит через его вершины;

в) окружность является касающейся всех его сторон.

Ответы к тесту:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**
1	б	а	в	а
2	а	б	а	в

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – четыре правильных ответа;
- оценка «4» – три правильных ответа;
- оценка «3» – два правильных ответа;
- оценка «2» – один правильный ответ.

3. Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала (устно).

1) *Дано*: M, N, K, P – точки касания (рис. 8.125). $ABCD$ – прямоугольная трапеция, $OK = 4{,}2$.

Найти: P_{ABCD}.

2) Рис. 8.126.

Найти: расстояние от точки E до прямых BC и AD.

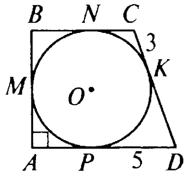


Рис. 8.125

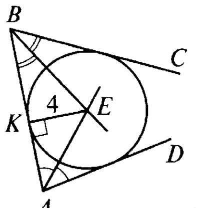


Рис. 8.126

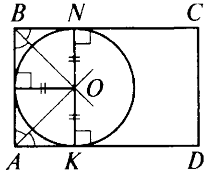


Рис. 8.127

III. Изучение нового материала

1. Рассмотреть замечание 3 (учебник, с. 180). Примеры:

а) прямоугольник (рис. 8.127);

б) параллелограмм (рис. 8.128).

2. Сформулировать свойство описанного четырехугольника.

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Теорема: В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Доказательство: AB, BC, CD, AD – касательные (рис. 8.129), следовательно, отрезки касательных, проведенные из вершин четырехугольника, равны, т. е. $AM = AP = a$, $BM = BN = b$, $CN = CK = c$, $DP = DK = d$, отсюда $AB + CD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$, т. е. $AB + CD = AD + BC$.

3. Сформулировать утверждение, обратное свойству описанного четырехугольника, и выяснить его справедливость (см. задачу № 724).

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачи № 105, 106 (самостоятельно с последующей взаимопроверкой).

2. Решить задачу № 697.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 697

Проведем радиусы OH_1, OH_2, OH_3, ..., OH_n, где H_1, H_2, H_3, ..., H_n – точки касания, тогда OH_1, OH_2, OH_3, ..., OH_n – высоты треугольников AOB, BOC, COD, ..., KOA соответственно (рис. 8.130).

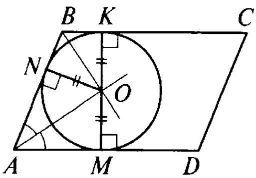


Рис. 8.128

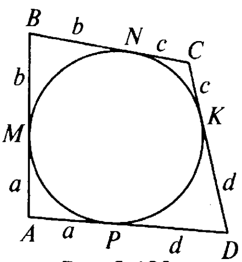


Рис. 8.129

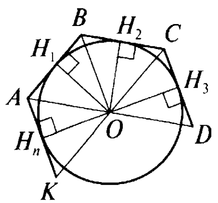


Рис. 8.130

$S_{ABCD...K} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + ... + S_{KOA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH_1 + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OH_2 + ... + \frac{1}{2} \cdot KA \cdot OH_n$.

$OH_1 = OH_2 = OH_3 = ... = OH_n = r$, тогда $S_{ABCD...K} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CD + ... + KA) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot P_{ABCD...K}$.

Наводящие вопросы.

– Разобьем многоугольник на треугольники с общей вершиной O. Что можно сказать о площадях этих треугольников?
– Чему равна площадь многоугольника?

3. Решить задачи № 698, 696 (самостоятельно).

Задача № 698

Краткое решение: В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. Если сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, то его периметр равен $12 \cdot 2 = 24$ см $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$ см^2.

Ответ: 60 см^2.

Задача № 696

Краткое решение: Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны. Если в параллелограмм $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = AD + BC$. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $AB = CD$, $AD = BC \Rightarrow 2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD = BC = CD \Rightarrow ABCD$ – ромб.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за первую часть урока ставится как среднее арифметическое оценок за тест и самостоятельное решение задач.)

V. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. В равносторонний треугольник вписана окружность радиусом 4 см. Найдите сторону треугольника.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Найдите стороны AB и CD, если $BC = 6$ см, $AD = 9$ см, AB в 2 раза больше, чем CD.

Вариант 2

1. В равносторонний треугольник со стороной 8 см вписана окружность. Найдите радиус окружности.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Найдите стороны BC и AD, если $AB = 7$ см, $CD = 11$ см, BC в 2 раза меньше AD.

II уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ см, радиус вписанной в него окружности равен 2 см. Найдите площадь этого треугольника.

2. В равнобедренной трапеции разность оснований равна 20 см, а радиус вписанной в нее окружности равен $2\sqrt{14}$ см. Найдите стороны трапеции.

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC + BC = 17$ см, радиус вписанной в него окружности равен 2 см. Найдите площадь этого треугольника.

2. В равнобедренной трапеции сумма оснований равна 48 см, а радиус вписанной в нее окружности равен $6\sqrt{3}$ см. Найдите стороны трапеции.

III уровень сложности

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь треугольника.

2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 и 8 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант 2

1. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, радиус описанной в него окружности равен 4 см. Найдите площадь треугольника.

2. Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 и 12 см. Найдите площадь трапеции.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Во всякий ли четырехугольник можно вписать окружность?
2. Сформулируйте свойство описанного четырехугольника.
3. Приведите примеры четырехугольников, в которые всегда можно вписать окружность.
4. В описанном четырехугольнике $ABCK$ $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $CK = 9$ см. Чему равна сторона AK?

Домашнее задание

1. П. 77, вопрос 23 (учебник, с. 185).
2. Решить задачи № 695, 699, 700, 701.

Урок 63. Описанная окружность

Основные дидактические цели урока: ввести понятия описанного около окружности многоугольника и вписанного в окружность многоугольника; рассмотреть теорему об окружности, описанной около треугольника, и показать ее применение при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1	***Вариант 2***
1. $8\sqrt{3}$ см.	1. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см.
2. $AB = 10$ см, $CD = 5$ см.	2. $BC = 6$ см, $AD = 12$ см.

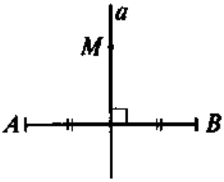


Рис. 8.131

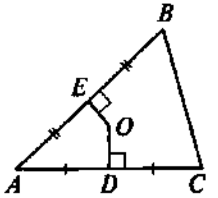


Рис. 8.132

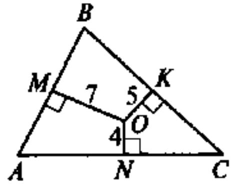


Рис. 8.133

II уровень сложности

Вариант 1	*Вариант 2*
1. 24 см^2.	1. 30 см^2.
2. 8, 18, 24, 18 см.	2. 12, 24, 36, 24 см.

III уровень сложности

Вариант 1	*Вариант 2*
1. $75 + 5\sqrt{3}$ см^2.	1. $48 + 32\sqrt{3}$ см^2.
2. 94,08 см^2.	2. 216 см^2.

2. Решение задач по готовым чертежам для подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1) *Дано:* a – серединный перпендикуляр к отрезку AB, $M \in AB$ (рис. 8.131).

Сравните: MA и MB.

2) *Дано:* $OD = 3$, $AC = 8$ (рис. 8.132).

Найти: AO, OC, OB.

3) *Дано:* $AO = 8$; OM, ON, OK – серединные перпендикуляры (рис. 8.133).

Найти: стороны треугольника ABC.

4. Рис. 8.134.

Найти: $\angle ACB$, $\angle CAO$.

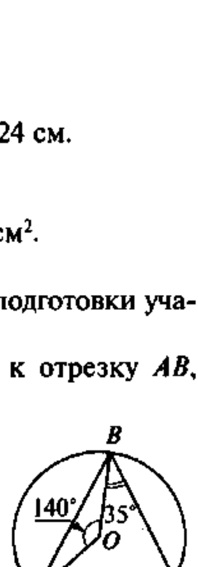


Рис. 8.134

III. Работа по теме урока

1. Ввести понятие окружности, описанной около многоугольника, и многоугольника, вписанного в окружность.

Определение: Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

$ABCDE$ вписан в окружность (рис. 8.135). $ABFE$ не вписан в окружность, так как F не лежит на окружности.

2. Работа в рабочих тетрадях.

Решить задачу № 109.

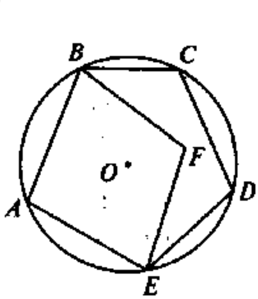


Рис. 8.135

3. Теорема об окружности, описанной около треугольника.

Задание. Опишите окружность около данного треугольника ABC.

Наводящие вопросы.

– Что значит «окружность описана около треугольника ABC»?
– Чем являются для данной окружности отрезки, соединяющие центр окружности с вершинами треугольника? Сравните отрезки OA, OB, OC.
– Если $OA = OB$, то где по отношению к отрезку AB находится точка O? А по отношению к отрезку BC, AC?
– Укажите точное расположение точки O.
– Докажите, что окружность с центром в точке O и радиусом, равным OA, являются описанным около данного треугольника.
– Сколько таких окружностей можно построить?

Теорема: Около любого треугольника можно описать окружность.

(С доказательством теоремы учащиеся могут ознакомиться дома.)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях.

Решить самостоятельно задачи № 110, 111.

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

2. Решить задачи № 704, 706.

Задача № 704

а) Так как треугольник ABC – прямоугольный (рис. 8.136), то $\angle C = 90°$. $\angle C$ – вписанный в окружность, и так как он прямой, то опирается на диаметр AB, тогда центр окружности лежит на AB и является ее серединой.

б) Так как $AB = d$, $\angle A = \alpha$, то $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, значит, $BC = d \cdot \sin\alpha$, $AC = d \cdot \cos\alpha$.

Ответ: d; $d \cdot \sin\alpha$; $d \cdot \cos\alpha$.

Наводящие вопросы.

– Что можно сказать о прямом угле, вписанном в окружность?
– Чем является гипотенуза прямоугольного треугольника, вписанного в окружность?
– Как взаимосвязаны острый угол, гипотенуза и катет прямоугольного треугольника?

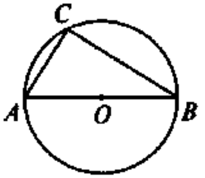


Рис. 8.136

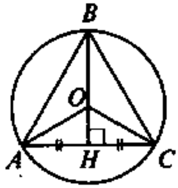


Рис. 8.137

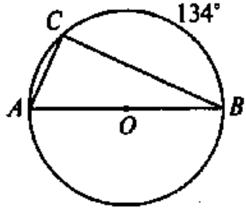


Рис. 8.138

Задача № 706

Решение: Так как треугольник ABC равносторонний (рис. 8.137), то его медиана BH является высотой, а значит, и серединным перпендикуляром, поэтому центр описанной окружности лежит на BH.

ΔAOH – прямоугольный, в нем $AH = \frac{1}{2} \cdot AC$, $AO = 10$ см, $\angle OAH = 30°$, $\cos \angle OAH = \frac{AH}{OA}$, $AH = OA \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ см, тогда $AC = 2 \cdot AH = 10\sqrt{3}$ см.

Ответ: $10\sqrt{3}$ см.

Наводящие вопросы.

– Где лежит центр описанной около равностороннего треугольника окружности?

– Как найти стороны треугольника AOH?

3. Решить задачи № 702 (а), № 703, № 705 (а) (самостоятельно).

Задача № 702 (а)

Краткое решение: $\angle C = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр (рис. 8.138). $\angle A = \frac{1}{2} \cdot CB = 67°$. $\angle B = 90° - \angle A = 23°$.

Задача № 703

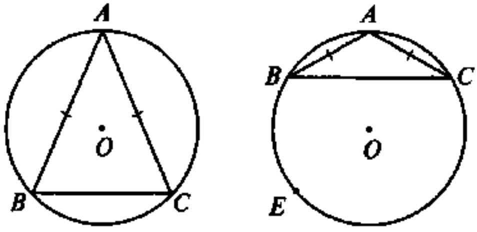
Решение:

Возможны два случая (рис. 8.139):

а) $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = 51°$, следовательно, $\angle B = \angle C = \frac{180° - 51°}{2} = 64°30'$.

б) $\cup BAC = 102°$, $\angle A = \frac{1}{2} \cup BEC = \frac{1}{2} \cdot (360° - \angle BAC) = \frac{1}{2} \cdot (360° - 102°) = 129°$, следовательно, $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cdot (180° - 129°) = 25°30'$.

Ответ: $\angle A = 51°$, $\angle B = \angle C = 64°30'$ или $\angle A = 129°$, $\angle B = \angle C = 25°30'$.



а б

Рис. 8.139

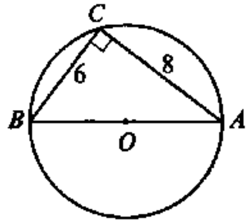


Рис. 8.140

Задача № 705 (а)

Краткое решение:

$\angle C = 90°$ (рис. 8.140) $\Rightarrow$ AB – диаметр $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Тогда $AB = 10$ см $\Rightarrow$ радиус окружности равен 5 см.

Ответ: 5 см.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой многоугольник называется описанным около окружности (вписанным в окружность)?
2. Сформулируйте теорему об окружности, описанной около треугольника.

Домашнее задание

1. П. 78, вопросы 24, 25 (учебник, с. 185).
2. Решить задачи № 702 (б), 705 (б), 707, 711.

Урок 64. Свойство вписанного четырехугольника

Основные дидактические цели урока: рассмотреть свойство вписанного четырехугольника и показать его применение при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика готовят доказательства теорем у доски.)

1) Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

2) Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника.

3) Докажите, что около треугольника можно описать только одну окружность.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 707, 711. Два ученика заранее готовят решение на доске.)

Задача № 707

Краткое решение: В ΔABC $\angle A = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$ (рис. 8.141). Тогда $\smile BC = 60° \Rightarrow \angle BOC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ – равносторонний $\Rightarrow OB = OC = r = 8$ см $\Rightarrow$ диаметр равен 16 см.

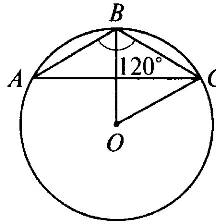


Рис. 8.141

Ответ: 16 см.

Задача № 711

Краткое решение: Центр описанной около треугольника окружности совпадает с точкой пересечения его серединных перпендикуляров, а радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до любой из вершин треугольника.

В прямоугольном треугольнике центр описанной около него окружности совпадает с серединой гипотенузы, а радиус равен половине гипотенузы.

3. Решение задач по готовым чертежам.

Решить задачи 1–6 – для повторения изученного на предыдущем уроке материала; задачи 7–9 – для подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1) Рис. 8.142.

Найти: $\angle B$.

2) *Дано:* $AB : BC = 1 : 2$; $AC = 5\sqrt{5}$ (рис. 8.143).

Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

Найти: AB, BC.

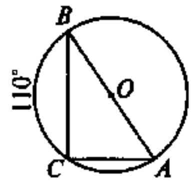


Рис. 8.142

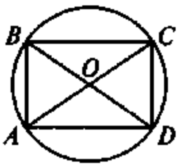


Рис. 8.143

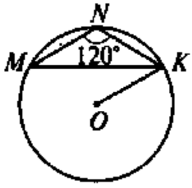


Рис. 8.144

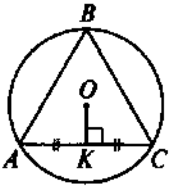


Рис. 8.145

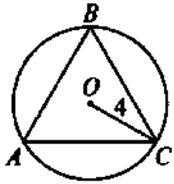


Рис. 8.146

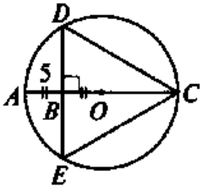


Рис. 8.147

3) *Дано:* $MN = NK = 4$ (рис. 8.144).
Найти: OK.
4) *Дано:* ΔABC – равносторонний, $OK = 3$ см (рис. 8.145).
Найти: AB.
5) *Дано:* ΔABC – равносторонний (рис. 8.146).
Найти: AB.
6) Рис. 8.147.
Найти: DC.
7) Рис. 8.148.
Найти: углы четырехугольника $ABCD$.
8) Рис. 8.149.
Найти: $\angle C$, $\angle D$.
9) Рис. 8.150.
Найти: $\angle A + \angle C$.
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1) $\angle B = 35°$.
2) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см.
3) $OK = 4$.

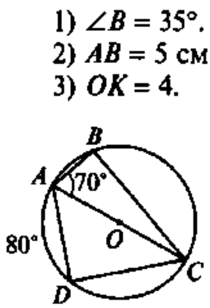


Рис. 8.148

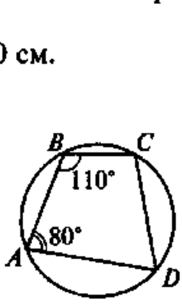


Рис. 8.149

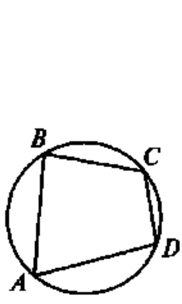


Рис. 8.150

4) $AB = 6\sqrt{3}$ см.
5) $AB = 4\sqrt{3}$ см.
6) $DC = 10\sqrt{3}$ см.
7) $\angle B = \angle D = 90°$; $\angle BAD = 120°$; $\angle BCD = 60°$.
8) $\angle C = 100°$; $\angle D = 70°$.
9) $\angle A + \angle C = 180°$.

(После окончания самостоятельного решения задач и взаимопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены семь-девять задач;
- оценка «4» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «3» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «2» – правильно решены одна-две задачи.

(Класс слушает ответы учащихся, работавших у доски.)

III. Работа по теме урока

1. Разобрать замечание 2 (учебник, с. 182). Примеры:

а) ромб;

б) параллелограмма.

2. Доказать теорему о свойстве вписанного четырехугольника.

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Задача. Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

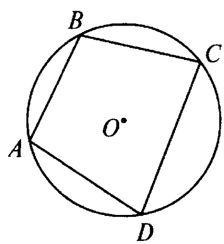


Рис. 8.151

Решение: $\angle A$ – вписанный в окружность (рис. 8.151), следовательно, $\angle A = \frac{1}{2}\cup BCD$.

$\angle C$ – вписанный в окружность, следовательно, $\angle C = \frac{1}{2}\cup BAD$.

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cup BCD + \frac{1}{2}\cup BAD = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = 360° : 2 = 180°$.

Таким же образом $\angle B + \angle D = \frac{1}{2}\cup ADC + \frac{1}{2}\cup ABC = \frac{1}{2}(\cup ADC + \cup ABC) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Наводящие вопросы.

– Каким по отношению к окружности является $\angle A$ и чему равна его величина?

– Чему равна сумма углов A и C?

3. Доказать утверждение, обратное свойству вписанного четырехугольника.

(Учитель делит класс на группы. На обсуждение дается 2–3 мин. Далее заслушивают представителей групп, в обсуждении участвует весь класс.)

Задание. Сформулируйте утверждение, обратное свойству вписанного четырехугольника, и выясните его истинность.

Теорема: Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $\angle A + \angle C = 180°$.

Доказать: около $ABCD$ можно описать окружность.

Доказательство: Проведем окружность через три вершины (A, B, D) четырехугольника $ABCD$ и выясним расположение вершины C по отношению к окружности.

Возможны три случая:

1) C лежит внутри окружности.
2) C лежит вне окружности.
3) C лежит на окружности.

Рассмотрим первый случай (рис. 8.152, а):

$\angle BCD = \frac{1}{2}(\smile BAD + \smile EF)$, отсюда, так как $\angle A = \frac{1}{2}\smile BED$, то $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BED + \smile BAD + \smile EF) > \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Рассмотрим второй случай (рис. 8.152, б):

$\angle BCD = \frac{1}{2}(\smile BAD - \smile EF)$, отсюда так как $\angle A = \frac{1}{2}\smile BED$, то $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BAD + \smile BED - \smile EF) < \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$, что противоречит условию $\angle A + \angle C = 180°$.

Единственно возможным остается третий случай, т. е. точка C лежит на окружности и четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность.

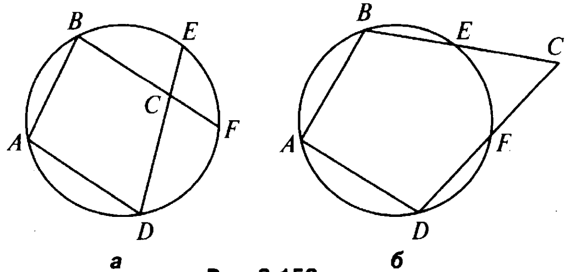


Рис. 8.152

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 708 (устно).

2. Решить задачи № 1, 2.

Задача 1

Найдите периметр прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 7,5 см, если стороны прямоугольника относятся как 3 : 4.

Решение: Так как прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 8.153), то его диагональ является диаметром данной окружности, т. е. $AC = 2 \cdot 7{,}5 = 15$ см.

ΔABC – прямоугольный, $AB : BC = 3 : 4$ по условию задачи ($AB = 3 \cdot x$, $BC = 4x$), $AC = 15$ см.

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, т. е. $(3 \cdot x)^2 + (4 \cdot x)^2 = 15^2$, откуда $x = 3$, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, тогда $P_{ABCD} = 2 \cdot (9 + 12) = 42$ см.

Ответ: 42 см.

Наводящие вопросы.

– Чему равна диагональ прямоугольника?

– Как найти катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равны 15 см, а катеты относятся как 3 : 4?

– Вычислите периметр прямоугольника.

Задача 2

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке Q. Докажите, что около четырехугольника $BEQD$ можно описать окружность.

Решение: Проведем отрезок BQ, тогда ΔBQE и ΔBQD – прямоугольные, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle 3 + \angle 4 = 90°$ (рис. 8.154).

$\angle EBD + \angle EQD = (\angle 1 + \angle 3) + (\angle 2 + \angle 4) = (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 90° + 90° = 180°$.

$\angle BEQ = \angle BDQ = 90°$, так как AD и CE – высоты.

В четырехугольнике $BEQD$ суммы противоположных углов равны 180°, поэтому около него можно описать окружность.

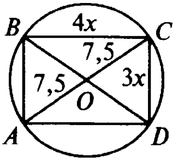


Рис. 8.153

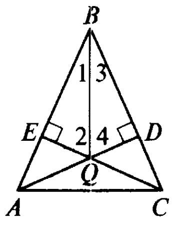


Рис. 8.154

Наводящие вопросы.

– В каком случае около четырехугольника можно описать окружность?
– Чему равна сумма углов E и D четырехугольника $BEQD$? А сумма углов B и Q? Почему?

V. Самостоятельная работа

I уровень сложности

Вариант 1

1. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6 см. Найдите его сторону.

2. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вписан в окружность. Найдите его радиус.

Вариант 2

1. Равносторонний треугольник MNK со стороной 8 см вписан в окружность. Найдите его радиус.

2. Прямоугольный треугольник вписан в окружность радиуса 6,5 см. Найдите площадь треугольника, если один из его катетов равен 5 см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Равнобедренный треугольник с основанием 8 см вписан в окружность радиуса 5 см. Найдите площадь этого треугольника и его боковую сторону.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Найдите углы четырехугольника, если $\smile BC = 100°$, $\smile CD = 60°$.

Вариант 2

1. Равнобедренный треугольник с высотой, проведенной к основанию и равной 16 см, вписан в окружность радиуса 10 см. Найдите площадь этого треугольника и его боковую сторону.

2. Четырехугольник $MNKP$ вписан в окружность с диаметром MK. Найдите углы четырехугольника, если $\smile NK = 140°$, $\smile PK = 100°$.

VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой многоугольник называется описанным около окружности (вписанным в окружность)?
2. Сформулируйте теорему об окружности, описанной около треугольника.
3. Сформулируйте свойство вписанного четырехугольника.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 709, 710, 731, 735.
2. Вопросы 1–26 без доказательств (учебник, с. 184, 185).

Урок 65. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Основные дидактические цели урока: систематизировать теоретический материал главы VIII; совершенствовать навыки решения задач по теме «Окружность»; подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

1. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

1) Провести общий анализ самостоятельной работы.

2) Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3) Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

Ответы к задачам самостоятельной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1) $6\sqrt{3}$ см.

2) 5 см.

Вариант 2

1) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

2) 30 см^2.

II уровень сложности

Вариант 1

1) 32 см^2, $4\sqrt{5}$ см.

2) $\angle B = \angle D = 90°$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 100°$.

Вариант 2

1) 128 см^2, $8\sqrt{5}$ см.

2) $\angle N = \angle P = 90°$, $\angle K = 60°$, $\angle M = 120°$.

2. Теоретический тест.

Вариант 1

Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение или правильная формулировка определения, теоремы, свойства.

1) Прямая и окружность имеют две общие точки, если расстояние от ... до ... меньше ... .

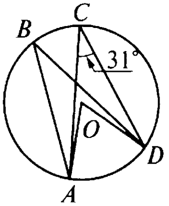


Рис. 8.155

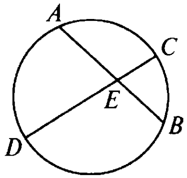


Рис. 8.156

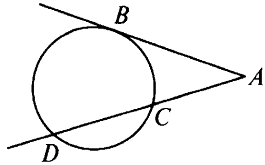


Рис. 8.157

2) Если прямая AB – касательная к окружности с центром O и B – точка касания, то прямая AB и ... OB ... .

3) Угол AOB является центральным, если точка O является ... лучи OA и OB ... .

4) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, ...

5) $\angle ABD =$ ... $\angle AOD =$ ... (рис. 8.155).

6) Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E (рис. 8.156), то верно равенство ... .

7) Если AB – касательная, AD – секущая (рис. 8.157), то выполняется равенство ... .

8) Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то ... .

9) Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой ... .

10) Если точка A равноудалена от сторон данного угла, то она лежит на ... .

11) Если точка B лежит на серединном перпендикуляре, проведенному к данному отрезку, то она ... .

12) Около любого ... можно описать окружность.

Вариант 2

Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение или правильная формулировка определения, теоремы, свойства.

1) Прямая и окружность имеют только одну общую точку, если расстояние от ... до ... равно ... .

2) Если прямая CD проходит через конец радиуса OK и $CD \perp OK$, то CD является ... к данной окружности.

3) Угол ABC является вписанным, если точка B ... , а лучи BA и BC ... .

4) Вписанные углы равны, если они ... на одну ... .

5) $\angle ABD =$ ... $\angle ACD =$ ... (рис. 8.158).

6) Если отрезки AB и AC – отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки (рис. 8.159), то ... .

7) Если AC и AE – секущие (рис. 8.160), то выполняется равенство ... .

Рис. 8.158

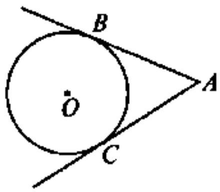


Рис. 8.159

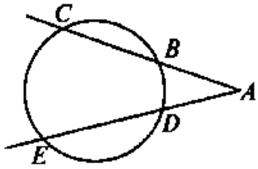


Рис. 8.160

8) Если четырехугольник описан около окружности, то ... .

9) Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой ... .

10) Если точка C равноудалена от концов данного отрезка, то она лежит на ... .

11) Если точка D лежит на биссектрисе данного угла, то она ... .

12) В любой ... можно вписать окружность.

(Взаимопроверка работ (тестов), используя п. 8 Приложения (см. с. 409). Анализ ошибок.)

III. Решение задач

1. Решить задачи № 719, 732.

Задача № 719

Решение: $\angle ADC + \angle ADE = 180°$, так как они смежные (рис. 8.161), следовательно, $\angle ADC = 180° - \angle ADE$.

$\angle ADE$ – вписанный, следовательно, $\angle ADE = \cup AE : 2$.

$\angle BAD$ – вписанный, следовательно, $\angle BAD = \cup BD : 2$.

В треугольнике ACD сумма углов равна 180°, следовательно, $\angle ACD = 180° - (\angle CAD + \angle ADC) = 180° - (\angle BAD + 180° - \angle ADE) =$ $= \angle ADE - \angle BAD = \cup AE : 2 - \cup BD : 2 = (\cup AE - \cup BD) : 2$.

Наводящие вопросы.

– Чему равна величина $\angle ADE$? $\angle BAD$?

– Найдите $\angle C$ из треугольника ADC.

Задача № 732

Решение: В четырехугольнике $BCMH$ $\angle C = 90°$, $\angle BHM = 90°$ (рис. 8.162).

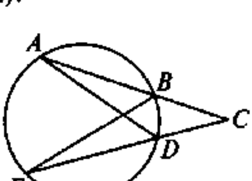


Рис. 8.161

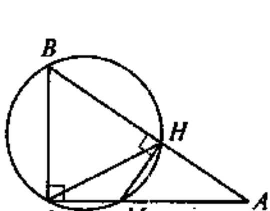


Рис. 8.162

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°. Так как $\angle C = 90°$ и $\angle BHM = 90°$, то $\angle C + \angle BHM = \angle B + \angle HMC = 180°$, т. е. около данного четырехугольника можно описать окружность.

Вписанные углы MHC и MBC опираются на одну и ту же дугу MC, поэтому $\angle MHC = \angle MBC$.

Наводящие вопросы.

– Найдите суммы противолежащих углов четырехугольника $BCMH$. О чем это говорит?

– Что общего между углами MHC и MBC?

2. Решить задачи (самостоятельно).

I уровень сложности: задачи № 1–3.

II уровень сложности: задачи № 733, 730, 725, 727.

Решение задач I уровня сложности:

Задача 1

Через точку A окружности проведены диаметр AC и две хорды AB и AD так, что хорда AB равна радиусу окружности, точка D делит полуокружность AC на две равные дуги. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если точки B и D лежат по разные стороны от диаметра AC.

Решение: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр (рис. 8.163).

ΔAOB – равносторонний, так как $AO = BO$ как радиусы, а хорда AB равна радиусу, тогда $\angle BAO = 60°$, $\angle BCO = 30°$.

Точка D делит полуокружность AC на две равные дуги AD и DC, поэтому хорды AD и DC равны, т. е. ΔADC – равнобедренный прямоугольный, поэтому $\angle DAC = \angle DCA = 45°$.

$\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 60° + 45° = 105°$.

$\angle BCD = \angle BCO + \angle DCA = 30° + 45° = 75°$.

Ответ: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 105°$, $\angle BCD = 75°$.

Задача 2

Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а высота, проведенная к ней, равна 12 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

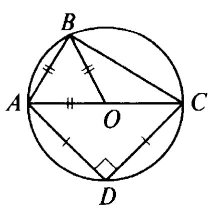


Рис. 8.163

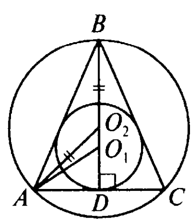


Рис. 8.164

Решение: ΔAO_2D – прямоугольный (рис. 8.164), по теореме Пифагора $AO_2^2 = AD^2 + DO_2^2$.

Точка O_2 – центр описанной окружности – лежит на биссектрисе, медиане, высоте, а значит, серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

$BD = 12$ см, $BO_2 = R$, следовательно, $DO_2 = 12 - R$, $R^2 = 9^2 + (12 - R^2)$.

$R^2 = 81 + 144 - 24 \cdot R + R^2$, $24 \cdot R = 225$, отсюда $R = 9\frac{3}{8}$ см.

Центр вписанной окружности также лежит на BD.

AO_1 – биссектриса $\angle BAC$, следовательно, $\frac{AB}{BO_1} = \frac{AD}{DO_1}$.

По теореме Пифагора в ΔABD $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, т. е. $AB = 15$ см.

Так как $BO_2 = R$, то $DO_1 = BD - BO_2 - O_1O_2 = 12 - 9\frac{3}{8} - O_1O_2$ см, $BO_1 = BO_2 + O_1O_2 = 9\frac{3}{8} + O_1O_2$. $\frac{15}{9\frac{3}{8} + O_1O_2} = \frac{9}{2\frac{5}{8} - O_1O_2}$,

$15 \cdot \left(\frac{21}{8} - O_1O_2\right) = 9 \cdot \left(\frac{75}{8} + O_1O_2\right)$, $O_1O_2 = -1\frac{7}{8}$.

Так как $O_1O_2 < 0$, следовательно, O_1 лежит между точками B и O_2, тогда $2 = DO_1 - O_1O_2 = 2\frac{5}{8} + 1\frac{7}{8} = 4{,}5$ см.

Ответ: $9\frac{3}{8}$ см и 4,5 см.

Задача 3

Отрезок BD – диаметр окружности с центром O. Хорда AC пересекает радиус OB под прямым углом и точкой пересечения делит его пополам. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, AD, BC, CD.

Решение: $\Delta BCK = \Delta OCK$ по двум катетам (рис. 8.165), следовательно, $BC = OC = R = OB$, отсюда ΔBCO – равносторонний, следовательно, $\angle CBO = \angle COB = 60°$, отсюда, $\cup BC = 60°$.

ΔAOC – равнобедренный с основанием AC. Высота OK, проведенная к основанию, является его медианой, т. е. $CK = KA$.

Так как диагонали четырехугольника $ABCO$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то $ABCO$ – параллелограмм, тогда $BC = CO = AB = AO$, следовательно, $\angle OBA = 60°$, $\angle BOA = 60°$, отсюда $\angle CBA = 120°$, $\cup AB = 60°$.

$\angle BCD = 90°$, $\angle BAD = 90°$ как углы, опирающиеся на диаметр.

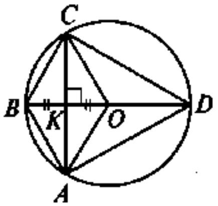


Рис. 8.165

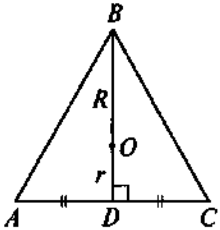


Рис. 8.166

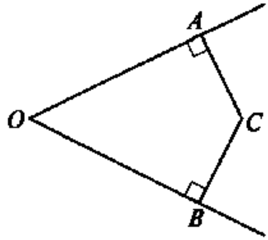


Рис. 8.167

Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, отсюда $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, следовательно, $\angle ADC = 60°$.

Ответ: $\angle A = 90°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 90°$, $\angle D = 60°$.

Решение задач II уровня сложности:

Задача № 733

Краткое решение: Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис (рис. 8.166), центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров. В равностороннем треугольнике медианы, биссектрисы, высоты, серединные перпендикуляры совпадают, значит, совпадают центры вписанной и описанной окружностей, т. е. $R + r = BD$. Но так как BD – медиана, O – точка пересечения медиан, то $R : r = 2 : 1 \Rightarrow$ так как $R = 10$ см, то $r = 5$ см.

Задача № 730

Краткое решение: $\angle A + \angle B = 180°$. $OACB$ – выпуклый четырехугольник (рис. 8.167) $\Rightarrow \angle O + \angle A + \angle C + \angle B = 180° \Rightarrow \angle O + \angle C = 180° \Rightarrow$ около четырехугольника $OACB$ можно описать окружность.

Задача № 725

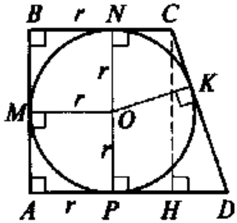


Рис. 8.168

Краткое решение: Так как BC, CD, AB, AD – касательные (рис. 8.168), то $BM = BN$, $AM = AP$, $CN = CK$, $DP = DK$.

$AMOP$ – квадрат $\Rightarrow AP = r \Rightarrow DP = a - r$ и $KD = a - r$.

$MBNO$ – квадрат $\Rightarrow BN = r \Rightarrow NC = b - r$ и $CK = b - r \Rightarrow CD = CK = KD = a + b - 2r$.

$PNCH$ – прямоугольник $\Rightarrow PH = a - r - (b - r) = a - b \Rightarrow$ в ΔCHD по теореме Пифагора $CD^2 = CH^2 + HD^2 \Rightarrow (a + b - 2r)^2 = (2r)^2 + (a - b)^2$. $a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = 4r^2 + a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab - 4ar - 4br = -2ab \Rightarrow 4ab = (4a + 4b)^2 \Rightarrow r = \dfrac{4ab}{4a + 4b} = \dfrac{ab}{a + b}$.

Ответ: $r = \dfrac{ab}{a + b}$.

Задача № 727

Решение: Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, поэтому точка O_2 лежит на серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис этого треугольника. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является также медианой и высотой, т. е. содержится серединным перпендикуляром, проведенным к основанию, поэтому точка O_1 лежит на серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

IV. Рефлексия учебной деятельности

Обсудить решение задач, которые вызвали затруднения у большинства учащихся.

Домашнее задание

1. Решить задачи. I уровень сложности: решить задачи по готовым чертежам (с ответами); II уровень сложности: № 718 (устно), № 722, 726, 728, 734 (письменно).
2. Домашние задачи по готовым чертежам:

1) *Дано*: $R = 3$ см, $AB = 15$ см (рис. 8.169).
Найти: AK, KB.

2) *Дано:* B – точка касания, $\smile BK = 58°$ (рис. 8.170).
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

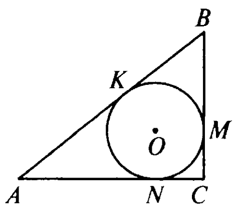


Рис. 8.169

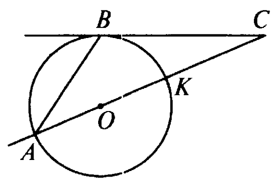


Рис. 8.170

3) *Дано:* $AB = 15$ (рис. 8.171).
Найти: DC, BC.
4) *Дано:* $P_{ABE} = 28$ см (рис. 8.172).
Найти: P_{DEC}.
5) *Дано:* $CK = 16$, $CP = 6$, $CM = 24$ (рис. 8.173).
Найти: DM.
6) *Дано:* $\angle CED$ в 9 раз больше $\angle BEC$, $\angle DAE$ на 61° больше $\angle BEC$ (рис. 8.174).
Найти: $\angle CBE$.
7) Рис. 8.175.
Найти: $\angle MNK$.
8) *Дано:* AB, AC — касательные, $R = 11$ (рис. 8.176).
Найти: BC.
9) *Дано:* $\cup BK = 40°$, $\cup AM = 100°$ (рис. 8.177).
Найти: $\angle ABM$, $\angle BMK$, $\angle ACM$.

Ответы к домашним задачам по готовым чертежам:
1) $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.
2) $\angle A = 29°$, $\angle B = 119°$, $\angle C = 32°$.
3) $BC = 9$, $CD = 16$.
4) $P_{CDE} = 42$ см.
5) $DM = 20$.
6) $\angle CBE = 79°$.
7) $\angle MNK = 117°$.
8) $BC = 11\sqrt{2}$.
9) $\angle ABM = 50°$, $\angle BMK = 20°$, $\angle ACM = 30°$.

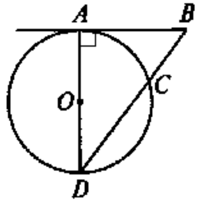


Рис. 8.171

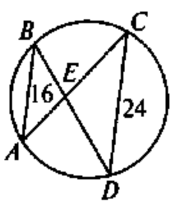


Рис. 8.172

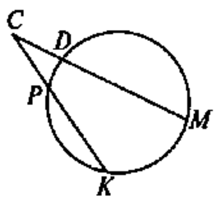


Рис. 8.173

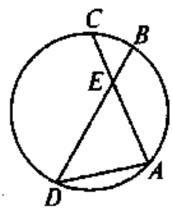


Рис. 8.174

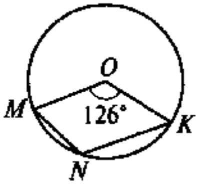


Рис. 8.175

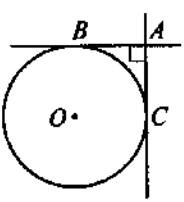


Рис. 8.176

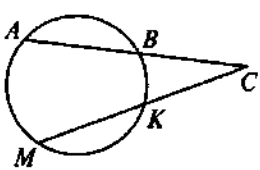


Рис. 8.177

Урок 66. Контрольная работа № 5 по теме «Окружность»

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Окружность».

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний по теме «Окружность» может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

I уровень сложности

Вариант 1

1. AB и AC – отрезки касательных, проведенные к окружности радиусом 9 см. Найдите длины отрезков AC и AO, если $AB = 12$ см.

2. *Дано:* $\cup AB : \cup BC = 11 : 12$ (рис. 8.178).

Найти: $\angle BCA$, $\angle BAC$.

3. Хорды MN и PK пересекаются в точке E так, что $ME = 12$ см, $NE = 3$ см, $PE = KE$. Найдите PK.

4*. Окружность с центром O и радиусом 16 см описана около треугольника ABC так, что $\angle OAB = 30°$, $\angle OCB = 45°$. Найдите стороны AB и BC треугольника.

Вариант 2

1. MN и MK – отрезки касательных, проведенные к окружности радиусом 5 см. Найдите MN и MK, если $MO = 13$ см.

2. *Дано*: $\cup AB : \cup AC = 5 : 3$ (рис. 8.179).

Найти: $\angle BOC$, $\angle ABC$.

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке F так, что $AF = 4$ см, $BF = 16$ см, $CF = DF$. Найдите CD.

4*. Окружность с центром O и радиусом 12 см описана около треугольника MNK так, что $\angle MON = 120°$, $\angle NOK = 90°$. Найдите стороны MN и NK треугольника.

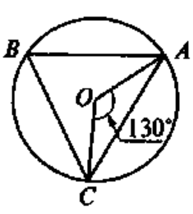


Рис. 8.178

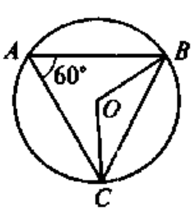


Рис. 8.179

II уровень сложности

Вариант 1

1. В треугольник вписана окружность так, что три из шести получившихся отрезков касательных равны 3 см, 4 см, 5 см. Определите вид треугольника.

2. Точки A и B делят окружность с центром O на дуги AMB и ACB так, что дуга ACB на 60° меньше дуги AMB. AM – диаметр окружности. Найдите углы AMB, ABM, ACB.

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке E так, что $AE = 3$ см, $BE = 36$ см, $CE : DE = 3 : 4$. Найдите CD и наименьшее значение радиуса этой окружности.

4*. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию, – 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Вариант 2

1. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 2 см так, что один из получившихся отрезков касательных равен 4 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 24 см.

2. Точки E и H делят окружность с центром O на дуги EAH и EKH так, что дуга EKH на 90° меньше дуги EAH, EA – диаметр окружности. Найдите углы EKA, EAH, EKH.

3. Хорды MN и PK пересекаются в точке A так, что $MA = 3$ см, $NA = 16$ см, $PA : KA = 1 : 3$. Найдите PK и наименьшее значение радиуса этой окружности.

4*. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а высота, проведенная к ней, – 12 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 20 см, 26 см и 26 см.

2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

3. Точка M лежит на хорде AB так, что $AM : BM = 4 : 3$, $AB = 14$ см. Расстояние от центра окружности до точки M равно 4 см. Найдите радиус окружности.

4*. Точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, $\angle ACO = 34°$. Найдите $\angle AOB$.

Вариант 2

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 16 см, 17 см и 17 см.

2. Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

3. Точка E делит хорду AB так, что BE на 1 см меньше AE. Радиус окружности равен 9 см, $AB = 15$ см. Найдите расстояние от центра окружности до точки E.

4*. Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, $\angle ABO = 48°$. Найдите $\angle ACB$.

Итоговый тест № 5

Вариант 1

В заданиях A1–A5 выберите верный ответ из предложенных.

A1. Вписанный угол равен:

1) половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу;
2) центральному углу, опирающемуся на ту же дугу;
3) величине дуги, на которую он опирается;
4) вдвое больше величины дуги, на которую он опирается.

A2. Центром вписанной в треугольник окружности является:

1) точка пересечения высот треугольника;
2) точка пересечения биссектрис треугольника;
3) точка пересечения медиан треугольника;
4) точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника.

A3. AB и AC – отрезки касательных, проведенные к окружности радиуса 9 см с центром в точке O. Если $AB = 12$ см, то длина отрезка AO равна:

1) 12 см; 3) 10,5 см;
2) 9 см; 4) 15 см.

A4. Вписанный угол ABC равен 70°. Центральный угол, опирающийся на дугу AC, равен:

1) 35°; 3) 140°;
2) 70°; 4) 290°.

A5. Хорды MN и PK пересекаются в точке E так, что $ME = 12$ см, $NE = 3$ см, $PE = KE$. Отрезок PK равен:

1) 3 см; 3) 6 см;
2) 12 см; 4) 9 см или 4 см.

В заданиях B1–B3 запишите верный ответ.

B1. Точки A и B делят окружность с центром O на дуги AMB и ACB так, что дуга ACB на $60°$ меньше дуги AMB. AM – диаметр окружности. Найдите углы AMB, ABM, ACB.

B2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E так, что $AE = 3$ см, $BE = 36$ см, $CE : DE = 3 : 4$. Найдите CD.

B3. Окружность с центром O и радиусом 16 см описана около треугольника ABC так, что $\angle OAB = 30°$, $\angle OCB = 45°$. Найдите стороны AB и BC треугольника.

Запишите решение задач C1–C2.

C1. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

C2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию, – 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Вариант 2

В заданиях A1–A5 выберите верный ответ из предложенных.

A1. Центральный угол равен:

1) половине вписанного угла, опирающегося на ту же дугу;
2) вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу;
3) величине дуги, на которую он опирается;
4) половине величины дуги, на которую он опирается.

A2. Центром описанной около треугольника окружности является:

1) точка пересечения высот треугольника;
2) точка пересечения биссектрис треугольника;
3) точка пересечения медиан треугольника;
4) точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника.

A3. MN и MK – отрезки касательных, проведенные к окружности с центром в точке O и радиуса 5 см. Если $MO = 13$ см, то длина отрезка MK равна:

1) 12 см;	3) 13 см;
2) 5 см;	4) 9 см.

A4. Центральный угол AOB равен $130°$. Наименьший из вписанных углов, опирающихся на дугу AB, равен:

1) $130°$;	3) $115°$;
2) $65°$;	4) $260°$.

A5. Хорды AB и CD пересекаются в точке F так, что $AF = 4$ см, $BF = 16$ см, $CF = DF$. Отрезок CD равен:

1) 8 см; 3) 4 см;
2) 16 см; 4) 16 см или 4 см;

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. Точки E и H делят окружность с центром O на дуги EAH и EKH так, что дуга EKH на 90° меньше дуги EAH, EA – диаметр окружности. Найдите углы EKA, EAH, EKH.

В2. Хорды MN и PK пересекаются в точке A так, что $MA = 3$ см, $NA = 16$ см, $PA : KA = 1 : 3$. Найдите PK.

В3. Окружность с центром O и радиусом 12 см описана около треугольника MNK так, что $\angle MON = 120°$, $\angle NOK = 90°$. Найдите стороны MN и NK треугольника.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

С2. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а высота, проведенная к ней, – 12 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Ответы и указания к задачам контрольной работы:

I уровень сложности

Вариант 1

1. $AC = AB = 12$ см, $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = 15$ см.

2. $\angle BCA = \frac{1}{2}\cup AB = 55°$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\cup BC = 60°$.

3. $ME \cdot NE = PE \cdot KE$, $PE = 6$ см, $PK = PE + KE = 12$ см.

4. ΔAOB и ΔBOC – равнобедренные, $AO = BO = CO = 16$ см. $AB = 16\sqrt{3}$ см, $BC = 16\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. $MN = MK = \sqrt{MO^2 - ON^2} = 12$ см.

2. $\angle BOC = \cup BC = 120°$, $\angle ABC = \cup AC : 2 = 45°$.

3. $AF \cdot BF = CF \cdot DF$, $CF = 8$ см, $CD = CF + DF = 16$ см.

4. ΔMON и ΔNOK – равнобедренные, $MO = NO = KO = 12$ см. $MN = 12\sqrt{3}$ см, $NK = 12\sqrt{2}$ см.

II уровень сложности

Вариант 1

1. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см и 10 см. Так как $10^2 = 6^2 + 8^2$, то данный треугольник – прямоугольный.

2. $\cup ACB = 150°$, $\cup AMB = 210°$, следовательно, $\cup BM = 30°$, $\angle BOM = 30°$, отсюда $\angle ABM = 60°$. $\angle AMB$ опирается на диаметр, значит, $\angle AMB = 90°$. $\angle ACB = \cup AMB : 2 = (360° - 150°) : 2 = 105°$.

Ответ: $\angle AMB = 90°$, $\angle ABM = 60°$, $\angle ACB = 105°$.

3. $AE \cdot BE = CE \cdot DE$, следовательно, $CE = 9$ см, $DE = 12$ см, отсюда $CD = 21$ см. $AB = 39$ см, значит, диаметр может принимать значения не меньше самой длинной хорды, т. е. не меньше 39 см, значит, наименьшее значение радиуса этой окружности равно 19,5 см.

4. Рис. 8.180.

а) O – точка пресечения биссектрис, OD – радиус вписанной окружности. Так как AO – биссектриса, то $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{DO}$, следоватеольно, $\frac{10}{8-x} = \frac{6}{x}$, $x = 3$ см, т. е. радиус вписанной окружности равен 3 см.

б) O_1 – точка пересечения серединных перпендикуляров, $O_1A = O_1B$ – радиусы описанной окружности. $AO_1^2 = AD^2 + DO_1^2$, т. е. $(8 - y)^2 = 6^2 + y^2$, отсюда $y = 1,75$ см, следовательно, $AO_1 = 6,25$ см, т. е. радиус описанной окружности равен 6,25 см.

Ответ: $r = 3$ см, $R = 6,25$ см.

Вариант 2

1. Два отрезка касательных равны 2 см, еще два – по 4 см, тогда оставшиеся два – по 6 см. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см.

2. $\angle EKA$ опирается на диаметр, следовательно, $\angle EKA = 90°$. $\cup EKH = 135°$, $\cup AH = 45°$, отсюда $\angle EAH = 67°30'$. $\angle EKH = \cup EAH : 2 = 112°30'$.

Ответ: $\angle EKA = 90°$, $\angle EAH = 67°30'$, $\angle EKH = 112°30'$.

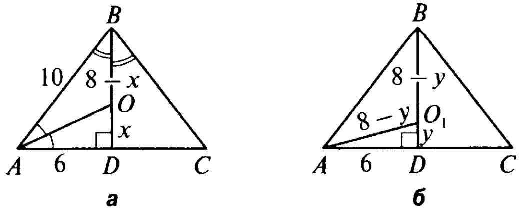


Рис. 8.180

3. $MA \cdot NA = PA \cdot KA$, значит, $PA = 4$ см, $KA = 12$ см, следовательно, $PK = 16$ см. $MN = 19$ см. Так как диаметр – это хорда наибольшей длины, то наименьшее значение диаметра может быть равно 19 см, а наименьшее значение радиуса 9,5 см.

4. Рис. 8.181.

а) O – точка пресечения биссектрис, OD – радиус вписанной окружности. Так как AO – биссектриса, то $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{DO}$, следовательно, $\frac{13}{12 - x} = \frac{5}{x}$, значит, $x = 3\frac{1}{3}$ см, т. е. радиус вписанной окружности равен 3 см.

б) O_1 – точка пересечения серединных перпендикуляров, $O_1A = O_1B$ – радиусы описанной окружности. $AO_1^2 = AD^2 + DO_1^2$, т. е. $(12 - y)^2 = 5^2 + y^2$, следовательно, $y = 4\frac{23}{24}$ см, значит, $AO_1 = 7\frac{1}{24}$ см, т. е. радиус описанной окружности равен 7 см.

Ответ: $r = 3$ см, $R = 7$ см.

III уровень сложности

Вариант 1

1. Рис. 8.182.

а) $\frac{AB}{BO_1} = \frac{AD}{DO_1}$; $\frac{26}{24 - x} = \frac{10}{x}$; $x = 6\frac{2}{3}$; $r = 6\frac{2}{3}$ см.

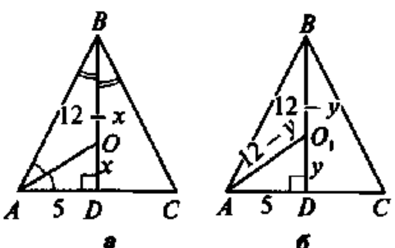
б) $(24 - y)^2 = 10^2 + y^2$; $y = 9\frac{11}{12}$ см; $R = 14\frac{1}{12}$ см.

Ответ: $r = 6\frac{2}{3}$ см, $R = 14\frac{1}{12}$ см.

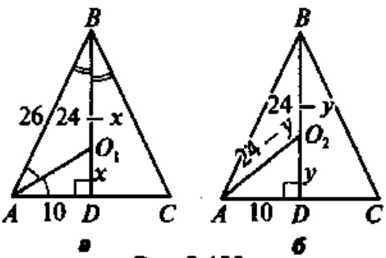
2. ΔOCD – прямоугольный (рис. 8.183) (так как DO и CO – биссектрисы углов C и D), следовательно, $CD = 10$ см. $r = OK = \frac{S_{OCD}}{CD : 2} = 4{,}8$ см, отсюда $AB = 9{,}6$ см.

$CK = \sqrt{OC^2 - OK^2} = 3{,}6$ см, следовательно, $KD = 6{,}4$ см, значит, $BC = 4{,}8 + 3{,}6 = 8{,}4$ см, $AD = 4{,}8 + 6{,}4 = 11{,}2$ см, $S_{ABCD} = AB \cdot (BC + AD) : 2 = 94{,}08$ см^2.

Ответ: 94,08 см^2.



а б
Рис. 8.181



а б
Рис. 8.182

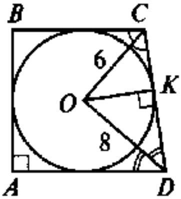


Рис. 8.183

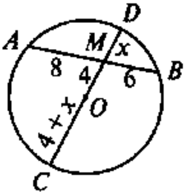


Рис. 8.184

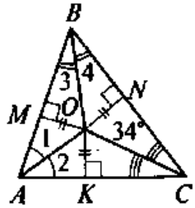


Рис. 8.185

3. $AM = 8$ см, $BM = 6$ см (рис. 8.184).

$(8 + x) \cdot x = 6 \cdot 8$, следовательно, $x = 4$, $r = 8$ см.

Ответ: 8 см.

4. O – точка пересечения биссектрис (рис. 8.185), следовательно, $\angle ACB = 68°$, отсюда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 112°$, значит, $\angle 1 + \angle 3 = 56°$, $\angle AOB = 124°$.

Ответ: $\angle AOB = 124°$.

Вариант 2

1. Рис. 8.186.

а) $\dfrac{AB}{BO_1} = \dfrac{AD}{DO_1}$; $\dfrac{17}{15 - x} = \dfrac{8}{x}$; $x = 4{,}8$; $r = 4{,}8$ см.

б) $(15 - y)^2 = 8^2 + y^2$; $y = 5\dfrac{11}{30}$ см; $R = 9\dfrac{19}{30}$ см.

Ответ: $r = 4{,}8$ см, $R = 9\dfrac{19}{30}$ см.

2. ΔAOB – прямоугольный (рис. 8.187) (так как AO и BO – биссектрисы углов A и B), следовательно, $AB = 15$ см. $r = OK = \dfrac{S_{\text{AOB}}}{AB : 2} = 7{,}2$ см, значит, $CH = 14{,}4$ см.

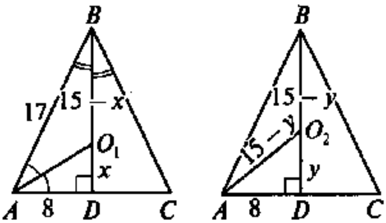
$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = 5{,}4$ см, $AK = 9{,}6$ см.

$BC = 2BK = 10{,}8$ см, $AD = 2AK = 19{,}2$ см, $S_{\text{ABCD}} = CH \cdot (BC + AD) : 2 = 216$ см^2.

Ответ: 216 см^2.

3. $AE = 8$ см, $BE = 7$ см (рис. 8.188).

$(9 + x)(9 - x) = 8 \cdot 7$, следовательно, $x = 5$.



а б

Рис. 8.186

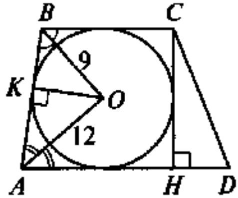


Рис. 8.187

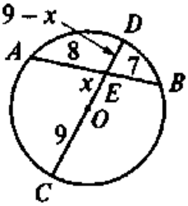


Рис. 8.188

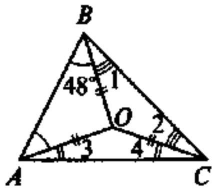


Рис. 8.189

$OE = 5$ см.

Ответ: $OE = 5$ см.

4. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180° - 2 \cdot 48° = 84°$ (рис. 8.189), следовательно, $\angle 2 + \angle 4 = 84° : 2 = 42°$.

Ответ: $\angle ACB = 42°$.

Ответы итогового теста № 5:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1
1	1	2	4	3	2	$\angle AMB = 75°$, $\angle ABM = 90°$, $\angle ACB = 105°$
2	3	4	1	2	2	$\angle EKA = 90°$, $\angle EAH = 67°30'$, $\angle EKH = 112°30'$

Вариант	B2	B3	C1	C2
1	21 см	$AB = 16\sqrt{3}$ см, $BC = 16\sqrt{2}$ см	94,08 см^2	3 см, 6,25 см
2	16 см	$MN = 12\sqrt{3}$ см, $NK = 12\sqrt{2}$ см	216 см^2	$3\frac{1}{3}$ см, $7\frac{1}{24}$ см

Критерии оценивания результатов контрольной работы:

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна, а при решении двух других задач допущены ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

За правильно решенную дополнительную задачу (№ 4) ставится дополнительная оценка.

Критерии оценивания результатов итогового теста:

- оценка «5» – учащийся набрал 14–19 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 9–13 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–8 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

За каждое правильно выполненное задание части А ставится 1 балл, части В – 2 балла, части С – 4 балла.

ПОВТОРЕНИЕ

Урок 67. Повторение по темам «Четырехугольники», «Площадь»

Основные дидактические цели урока: повторение основных теоретических фактов по темам «Четырехугольники», «Площадь»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе.

1. Провести общий анализ контрольной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

III. Повторение теории по темам «Четырехугольники» и «Площадь»

(Повторение проводится в виде тестирования с использованием пп. 5 и 6 Приложения (см. с. 404–406). Задания теста выполняются самостоятельно с последующим обсуждением заданий, в которых допущены ошибки.)

Тест 1

Установите, верно ли данное утверждение.

1. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

2. В трапеции углы при каждом основании равны.

3. Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

4. Вершины A и C ромба $ABCD$ симметричны относительно прямой BD.

5. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные им отрезки.

6. Отрезок, соединяющий точки, лежащие на боковых сторонах трапеции, параллелен основаниям и равен их полусумме.

7. Параллелограмм, у которого все углы равны и все стороны равны, является квадратом.

8. Биссектриса одного из углов параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

9. Площадь прямоугольной трапеции равна произведению ее средней линии на боковое ребро.

10. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

11. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ высоты AH и A_1H_1 равны, то $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = BC : B_1C_1$.

12. Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.

13. Если в ΔABC стороны равны 5, 6, 7 см, то его площадь равна $\sqrt{18 \cdot (18-5)(18-6)(18-7)}$ см^2.

14. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, то $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = (AB \cdot AC) : (A_1B_1 \cdot A_1C_1)$.

15. Медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.

Тест 2

Укажите верный ответ из предложенных.

1. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна:

а) 360°; б) 900°; в) 540°.

2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 100°. Три оставшихся угла равны:

а) 80°, 80°, 100°;

б) 75°, 75°, 110°;

в) 70°, 70°, 120°.

3. Смежные стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Диагонали его равны:

а) $\sqrt{28}$ см и $\sqrt{28}$ см;

б) 10 см и 10 см;

в) 14 см и 14 см.

4. Сторона ромба равна 5 см, а одна из его диагоналей 6 см. Площадь ромба равна:

а) 30 см^2; б) 24 см^2; в) 15 см^2.

5. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 70°$, $\angle ABC$ равен:

а) 20°; б) 110°; в) 55°.

6. В параллелограмме разность смежных сторон равна 5 см, а его периметр равен 38 см. Меньшая сторона параллелограмма равна:

а) 7 см; б) 12 см; в) 9,5 см.

7. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает BC в точке E так, что $BE = 4{,}5$ см, $CE = 5{,}5$ см. Площадь прямоугольника равна:

а) 55 см^2; б) 100 см^2; в) 45 см^2.

8. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Углы ромба равны:

а) 90°, 90°, 90°, 90°;

б) 60°, 60°, 120°, 120°;

в) 45°, 45°, 90°, 90°.

9. Ромб, не являющийся квадратом, имеет n осей симметрии. Значение n равно:

а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 4$.

10. Площадь ромба со стороной 8 см и углом 60° равна:

а) 32 см^2; б) $32\sqrt{3}$ см^2; в) $16\sqrt{3}$ см^2.

11. Площадь прямоугольника с гипотенузой 26 см, один из катетов которого равен 24 см, равна:

а) 120 см^2; б) 312 см^2; в) 240 см^2.

12. Площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной в 13 см и основанием в 24 см равна:

а) 120 см^2; б) 156 см^2; в) 60 см^2.

13. Одна из сторон параллелограмма равна 14 см, а высота, проведенная к ней – 12 см. Высота, проведенная к смежной стороне, равной 21 см, равна:

а) 8 см; б) 10 см; в) 19 см.

14. Площадь равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 16 см и боковой стороной 5 см равна:

а) 104 см^2; б) 52 см^2; в) 65 см^2.

15. Площадь квадрата со стороной $5\sqrt{2}$ см равна:

а) 50 см^2; б) 25 см^2; в) 100 см^2.

Ответы к тестам:

Тест 1

Верно: 1; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 14; 15.

Неверно: 2; 3; 6; 9; 12; 13.

Тест 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
в	а	б	б	б	а	в	б	б	б	а	в	а	б	а

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка. За каждый правильный ответ начисляется 1 балл.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» — учащийся набрал 24—28 баллов;
- оценка «4» — учащийся набрал 18—23 балла;
- оценка «3» — учащийся набрал 12—17 баллов;
- оценка «2» — учащийся набрал 0—11 баллов.

IV. Решение задач по готовым чертежам

1. *Дано: ABCD* — параллелограмм (рис. 1).
Найти: $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, S_{ABCD}.
2. *Дано: ABCD* — параллелограмм (рис. 2).
Найти: AD, DK, S_{ABCD}.
3. *Дано: ABCD* — ромб (рис. 3).
Доказать: MNKP — параллелограмм.
4. *Дано: ABCD* — параллелограмм (рис. 4).
Найти: P_{ABCD}, S_{ABCD}.
5. *Дано: ABCD* — прямоугольник (рис. 5).
Найти: $\angle CDE$, S_{ABO}, S_{BCO}.
6. *Дано: ABCD* — трапеция (рис. 6).
Найти: AD, S_{ABCD}.

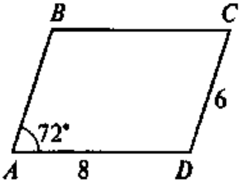


Рис. 1

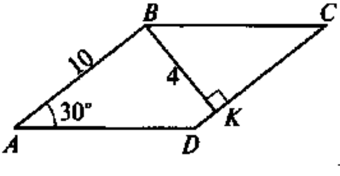


Рис. 2

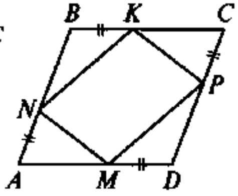


Рис. 3

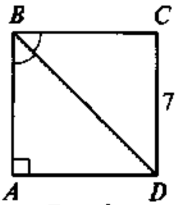


Рис. 4

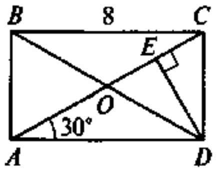


Рис. 5

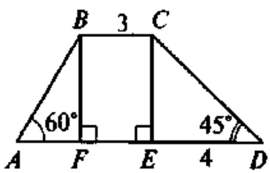


Рис. 6

7. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 7).
Найти: $\angle A$.
8. *Дано:* $\angle 1$ на 30° меньше $\angle 2$ (рис. 8).
Найти: AB, S_{ABCD}.
9. *Дано:* $AC = 9$ (рис. 9).
Найти: S_{ABC}, BH.
10. *Дано:* $ABCD$ – квадрат (рис. 10).
Найти: S_{ABCK}.
11. Рис. 11.
Найти: $S_{ABD} : S_{ACD}$.
12. *Дано:* $AC = 16$ см, $AD = DC$, $BE = 4$ см (рис. 12).
Найти: S_{ABE}, S_{BEC}.
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1. $\angle B = \angle D = 108°$, $\angle C = 72°$, $S_{ABCD} = 48 \cdot \sin 72°$.
2. $AD = 8$, $DK = 10 - 4\sqrt{3}$, $S_{ABCD} = 40$.
3. $MN = KP$, $NK = MP$, следовательно, $MNKP$ – параллелограмм.
4. $P_{ABCD} = 28$, $S_{ABCD} = 49$.
5. $\angle CDE = 30°$, $S_{ABO} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$; $S_{BCO} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.
6. $AD = 7 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $S_{ABCD} = 4\left(5 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
7. $\angle A = 50°$.
8. $AB = 10$, $S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$.
9. $S_{ABC} = 42\sqrt{2}$, $BH = \dfrac{28\sqrt{2}}{3}$.

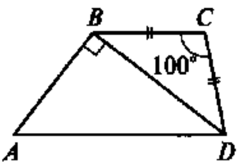


Рис. 7

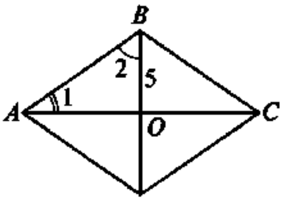


Рис. 8

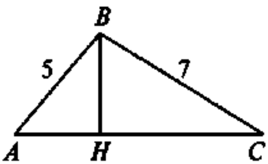


Рис. 9

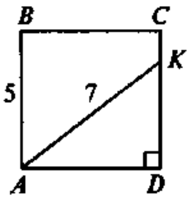


Рис. 10

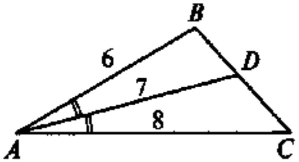


Рис. 11

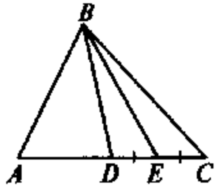


Рис. 12

10. $S_{ABCK} = 25 - 5\sqrt{6}$.

11. $S_{ABD} : S_{ACD} = 3 : 4$.

12. $S_{ABE} = 24$ см^2, $S_{BEC} = 8$ см^2.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка. За каждый правильный ответ начисляется 1 балл.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – учащийся набрал 10–12 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 7–9 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–6 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–4 балла.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за тест и решение задач по готовым чертежам.)

V. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

1. Вопросы для повторения к главам VII и VIII.
2. Решить любые 3–4 задачи.

1) В ΔABC через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Найдите AC, если $KE = 12$ см. Найдите площадь треугольника BKE, если площадь треугольника ABC равна 72 см^2.

2) В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AB, один из углов параллелограмма равен 120°, $AD = 12$ см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите диагонали параллелограмма и площадь треугольника CDO.

3) В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание равно меньшей боковой стороне. Диагональ, проведенная из вершины тупого угла, перпендикулярна большой боковой стороне, равной 16 см. Найдите периметр и площадь трапеции.

4) В равнобедренной трапеции $MNKP$ диагональ MK является биссектрисой угла при нижнем основании MP. Меньшее основание NK равно 8 см. Найдите площадь трапеции, если один из углов в два раза меньше другого. В каком отношении высота KE делит основание MP.

5) В параллелограмме $MNKP$ диагональ MK равна 20 см. Точки B и C – середины сторон NK и KP соответственно. Отрезок BC пересекает диагональ MK в точке E. Найдите ME и EK.

6) В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 8 см и 12 см, диагональ AC равна 40 см и пересекает диагональ BD в точке O. Найдите AO и CO, отношение площадей треугольников AOD и BOC.

Ответы к задачам:

1) $AC = 18$ см, $S_{BKE} = 32$ см^2.
2) $AC = 6\sqrt{7}$ см, $BD = 6\sqrt{3}$ см, $S_{CDO} = 18\sqrt{3}$ см^2.
3) $P_{ABCD} = 8\left(4+\sqrt{2}\right)$ см, $S_{ABCD} = 96$ см^2.
4) $S_{MNKP} = 48\sqrt{3}$ см^2, $ME : EP = 3 : 1$.
5) $ME = 15$ см, $EK = 5$ см.
6) $AO = 24$ см, $CO = 16$ см, $S_{AOD} : S_{BOC} = 9 : 4$.

Урок 68. Повторение по темам «Подобные треугольники», «Окружность»

Основные дидактические цели урока: систематизировать теоретические знания по темам «Подобные треугольники», «Окружность»; совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Актуализация знаний учащихся

(Повторение проводится в виде тестирования с использованием пп. 6 и 7 Приложения (см. с. 406–409). Задания теста выполняются самостоятельно с последующим обсуждением заданий, в которых допущены ошибки.)

Тест 1

Установите, верно ли данное утверждение.

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

2. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

3. На рисунке (рис. 13) $\angle ABC = \angle BCD$.

4. Если хорды MN и KP параллельны, то градусные меры дуг MK и NP равны.

5. Градусная мера дуги AmC, изображенной на рисунке (рис. 14), равна 75°.

6. Углы треугольника ABC, изображенного на рисунке (рис. 15), равны 30°, 30°, 120°.

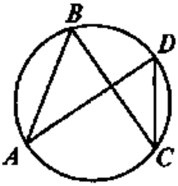


Рис. 13

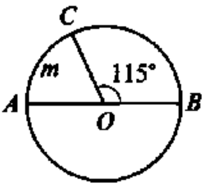


Рис. 14

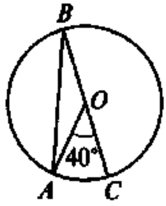


Рис. 15

7. Точки A и B делят окружность на две дуги, большая из которых равна 200°, а меньшая точкой K делится в отношении 5 : 3, считая от точки A. Тогда дуга AK = 100°.

8. Длина хорды AB, изображенной на рисунке (рис. 16), равна 12 см.

9. $AB = 6$, $AC = 3$, $AE = 4$, тогда $AD = 12$, $AK = 8$ (рис. 17).

10. В треугольнике ABC AH – биссектриса, поэтому $\frac{AB}{BH} = \frac{AC}{CH}$.

11. $CH = 8$, $AC = 8\sqrt{5}$, $CB = 4\sqrt{5}$ (рис. 18).

12. $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ (рис. 19).

13. $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$.

14. $\operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{\cos B}$.

15. $\sin A = \frac{3}{5}$ (рис. 20).

Тест 2

Выберите верный ответ из предложенных.

1. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$, $A_1B_1 = 8$. Сторона B_1C_1 равна:

а) 3; б) 12; в) 14.

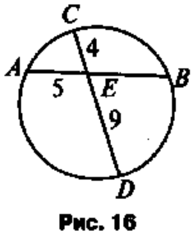


Рис. 16

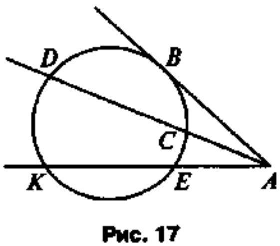


Рис. 17

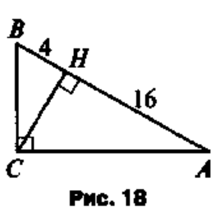


Рис. 18

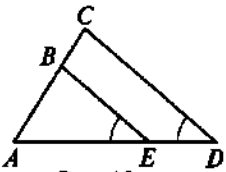


Рис. 19

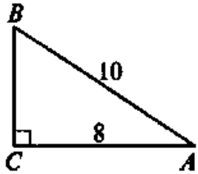


Рис. 20

2. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{3}{5}$, $S_{ABC} = 60$. Площадь $\Delta A_1B_1C_1$ равна:

а) 100; б) 36; в) 22,5.

3. В трапеции *ABCD BC* и *AD* – основания, $BC = 3$. $DO : OB = 4 : 3$, O – точка пересечения диагоналей. *AD* равно:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{9}{7}$; в) 4.

4. Если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, то:

а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$;

б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. В треугольниках *ABC* и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{2}{5}$. Если $BC = 10$, то B_1C_1 равно:

а) 25; б) 4; в) 5.

6. Высота, проведенная из вершины прямого угла треугольника *ABC* к гипотенузе *AC*, делит ее на отрезки, равные 25 см и 4 см. Эта высота равна:

а) 7 см; б) 10 см; в) $\sqrt{29}$ см.

7. По данным на чертеже (рис. 21) получаем:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$;

б) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$;

в) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

8. Диагонали ромба равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см. Его углы равны:

а) 30°, 150°, 30°, 150°;

б) 45°, 135°, 45°, 135°;

в) 60°, 120°, 60°, 120°.

9. По данным рисунка (рис. 22) величина дуги *BmC* равна:

а) 120°; б) 240°; в) 60°.

10. По данным рисунка (рис. 23) величина угла *DAC* равна:

а) 140°; б) 35°; в) 70°.

11. По данным рисунка (рис. 24) величина угла *BED* равна:

а) 50°; б) 20°; в) 40°.

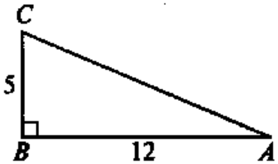


Рис. 21

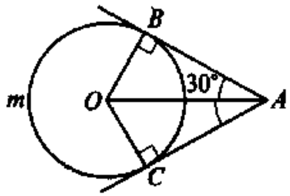


Рис. 22

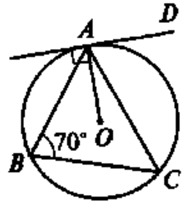


Рис. 23

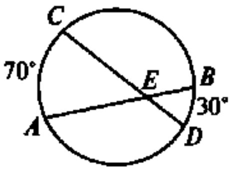


Рис. 24

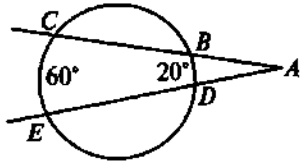


Рис. 25

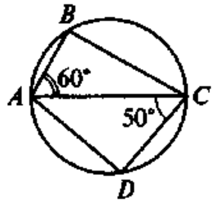


Рис. 26

12. По данным рисунка (рис. 25) величина угла CAE равна:

а) 20°; б) 40°; в) 30°.

13. По данным рисунка (рис. 26) углы четырехугольника равны:

а) 90°, 90°, 100°, 120°;

б) 90°, 90°, 80°, 100°;

в) 90°, 90°, 100°, 110°.

14. По данным рисунка (рис. 27) длина стороны AD равна:

а) 7; б) 5; в) 6.

15. Квадрат вписан в окружность диаметра 8 см. Периметр квадрата равен:

а) 32 см; б) $16\sqrt{2}$ см; в) 16 см.

Ответы к тестам:

Тест 1

Верно: 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12, 15.

Неверно: 3, 5, 6, 8, 9, 13, 14.

Тест 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
б	а	в	в	а	б	а	в	б	в	а	а	б	в	б

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка. За каждый правильный ответ начисляется 1 балл.)

Критерии оценивания:

- оценка «5» – учащийся набрал 25–30 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 19–24 балла;

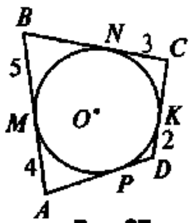


Рис. 27

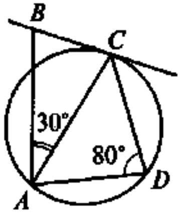


Рис. 28

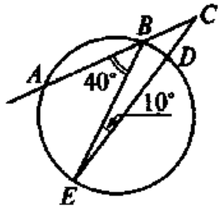


Рис. 29

- оценка «3» – учащийся набрал 12–18 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–11 баллов.

III. Решение задач по готовым чертежам

1. Рис. 28.
Найти: $\angle ABC$.
2. Рис. 29.
Найти: $\angle ACE$.
3. Рис. 30.
Найти: $\angle MEP$.
4. *Дано:* CP в 2 раза меньше PD (рис. 31).
Найти: CD.
5. *Дано:* $MK : PK = 2 : 3$ (рис. 32).
Найти: MP.
6. Рис. 33.
Найти: $\angle BAD$, $\angle BCD$.
7. Рис. 34.
Найти: CH, BC, AC.

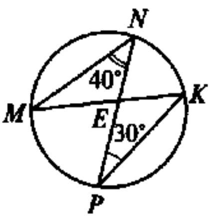


Рис. 30

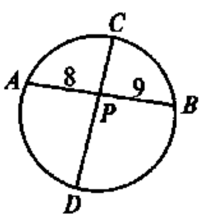


Рис. 31

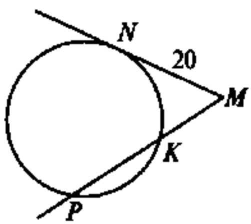


Рис. 32

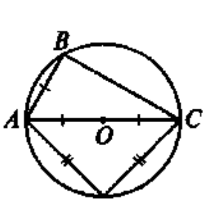


Рис. 33

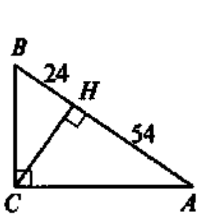


Рис. 34

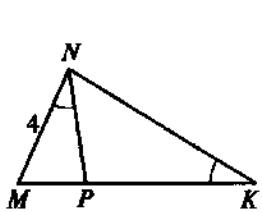


Рис. 35

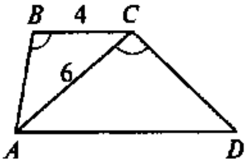


Рис. 36

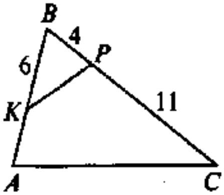


Рис. 37

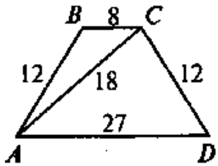


Рис. 38

8. *Дано:* $MK = 8$ (рис. 35).
Найти: PK.
9. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AB + CD = 15$ (рис. 36).
Найти: AD, AB, CD.
10. *Дано:* $AB \cdot BK = CB \cdot BP$ (рис. 37).
Найти: AK.
11. Рис. 38.
Найти: $S_{ABC} : S_{ACD}$.
Ответы к задачам по готовым чертежам:
1. $\angle ABC = 70°$.
2. $\angle ACE = 30°$.
3. $\angle MEP = 70°$.
4. $CD = 18$.
5. $MP = 10\sqrt{10}$.
6. $\angle BAD = 105°$, $\angle BCD = 75°$.
7. $CH = 36$, $BC = 12\sqrt{13}$, $AC = 18\sqrt{13}$.
8. $PK = 6$.
9. $AD = 9$, $CD = 9$, $AB = 6$.
10. $AK = 4$.
11. $S_{ABC} : S_{ACD} = 4 : 9$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка. За каждый правильный ответ начисляется 1 балл.)

Критерии оценивания:
- оценка «5» – учащийся набрал 9–11 баллов;
- оценка «4» – учащийся набрал 7–8 баллов;
- оценка «3» – учащийся набрал 4–6 баллов;
- оценка «2» – учащийся набрал 0–3 балла.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за тест и решение задач по готовым чертежам.)

IV. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить любые 3–4 задачи.

1. В окружности проведены две хорды MN и PK, пересекающиеся в точке E. $MN = 14$ см, ME на 2 см больше NE. Найдите площадь треугольника PNE, если площадь треугольника MEK равна 64 см^2.
2. Даны две окружности, общие внутренние касательные которых взаимно перпендикулярны, а хорды, соединяющие точки касания, равны 5 см и 21 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.
3. В ромбе $ABCD$ $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM : MB = CK : KD = 1{,}5$. Докажите, что $MBKD$ – прямоугольник и найдите его периметр и площадь.
4. В окружности радиуса 5 см проведена хорда $AB = 6$ см. На прямой AB вне хорды отмечена точка P так, что $AP : PB = 5 : 2$. Найдите расстояние от точки P до центра окружности.
5. Известно, что в треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 9$. На стороне AB отмечена точка P так, что $AP = 2$. Окружность, проходящая через точки P и B, касается стороны AC в точке T и пересекает сторону BC в точке Q. Найдите длины отрезков AT и BQ.

Ответы к задачам:

1. 36 см^2.
2. 26 см.
3. $P = 12$ см, $S = 8$ см^2.
4. $\sqrt{65}$ см.
5. 4, $\frac{24}{7}$.

Урок 69. Контрольная работа № 6 (итоговая)

Основная дидактическая цель урока: проверить знания, умения и навыки учащихся по темам, изученным в курсе геометрии 8 класса.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

(Учитель сообщает тему урока, формулирует цели урока.)

II. Выполнение контрольной работы

(Контроль знаний может быть проведен в форме контрольной работы или в форме итогового теста.)

Вариант 1

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а его основание 12 см. Найдите его площадь.

2. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки BK и KC, равные соответственно 8 см и 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

3. В трапеции $ABCD$ углы A и B прямые. Диагональ AC – биссектриса угла A и равна 6 см. Найдите площадь трапеции, если угол CDA равен 60°.

4. В окружности проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K, $KC = 6$ см, $AK = 8$ см, $BK + DK = 16$ см. Найдите длины BK и DK.

5. Квадрат со стороной 8 см описан около окружности. Найдите площадь прямоугольного треугольника с острым углом 30°, вписанного в данную окружность.

Вариант 2

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а его медиана, проведенная к основанию, равна 5 см. Найдите площадь и периметр треугольника.

2. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Найдите периметр и площадь ромба.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Найдите площадь трапеции, если угол CAD равен 30°, $AD = 12$ см.

4. В окружности проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, $MB = 10$ см, $AM = 12$ см, $DC = 23$ см. Найдите длины CM и DM.

5. Прямоугольный треугольник с катетом 4 см вписан в окружность. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около данной окружности.

Итоговый тест (№ 6)

Вариант 1

В заданиях A1–A5 выберите верный ответ из предложенных.

A1. Площадь равностороннего треугольника со стороной 6 см равна:

1) 9 см^2;
2) $9\sqrt{3}$ см^2;
3) 18 см^2;
4) $18\sqrt{3}$ см^2.

А2. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки $BK = 6$ см и $KC = 3$ см. Периметр параллелограмма равен:

1) 18 см;	3) 24 см;
2) 15 см;	4) 30 см.

А3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ высота, опущенная из вершины B на большее основание AD, равна 4 см и делит AD на отрезки, равные 5 см и 9 см. Площадь трапеции равна:

1) 36 см^2;	3) 18 см^2;
2) 72 см^2;	4) 38 см^2.

А4. $ABCD$ – квадрат со стороной 4 см. На сторонах AB и CD отложены отрезки AM и KC так, что $AM = RC = 3$ см. Найдите периметр четырехугольника $MBKD$.

1) 14 см;	3) 10 см;
2) 12 см;	4) 16 см.

А5. В трапеции $ABCD$ основание BC перпендикулярно боковой стороне AB, угол D равен 60°, диагональ AC перпендикулярна стороне CD, равной 8 см. Найдите BC.

1) 8 см;	3) 16 см;
2) 12 см;	4) 4 см.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. В окружности проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K, $KC = 6$ см, $AK = 8$ см, $BK + DK = 28$ см. Найдите произведение BK и DK.

В2. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны соответственно 6 см и 10 см. Диагональ AC, равная 32 см, пересекает диагональ BD в точке K. Найдите KC.

В3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 12$ см. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и CD так, что $CK = 3$ см, $CE = 2$ см. Отрезок KE пересекает диагональ AC в точке P. Найдите отношение AP к PC.

Запишите решение задач С1–С2.

С1. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 9$ см вписана окружность, касающаяся стороны AC в точке K. Найдите расстояние от точки K до точки M биссектрисы BM.

С2. В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K, $AK = 8$ см, $BK = 6$ см. Площадь треугольника AKD равна 128 см^2. Найдите площадь треугольника CBK.

Вариант 2

В заданиях А1–А5 выберите верный ответ из предложенных.

А1. Площадь равностороннего треугольника, высота которого равна 9 см, равна:

1) 13,5 см^2;
3) 6,75 см^2;
2) $13,5\sqrt{3}$ см^2;
4) $6,75\sqrt{3}$ см^2.

А2. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ делит сторону AD на отрезки $AE = 7$ см и $ED = 4$ см. Периметр параллелограмма равен:

1) 28 см;
3) 36 см;
2) 22 см;
4) 30 см.

А3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ высота, опущенная из вершины B на большее основание AD, равна 6 см и делит AD на отрезки, равные 3 см и 7 см. Площадь трапеции равна:

1) 84 см^2;
3) 21 см^2;
2) 42 см^2;
4) 26 см^2.

А4. $ABCD$ – квадрат со стороной 8 см. На сторонах AB и CD отложены отрезки AM и KC так, что $AM = RC = 6$ см. Найдите периметр четырехугольника $MBKD$.

1) 24 см;
3) 28 см;
2) 32 см;
4) 36 см.

А5. В трапеции $ABCD$ основание AD перпендикулярно боковой стороне AB, угол D равен 60°, диагональ AC перпендикулярна стороне CD, равной 6 см. Найдите AD.

1) 6 см;
3) 12 см;
2) 9 см;
4) 3 см.

В заданиях В1–В3 запишите верный ответ.

В1. В окружности проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E, $AE = 12$ см, $CE = 8$ см, $DE - BE = 3$ см. Найдите произведение BE и DE.

В2. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны соответственно 8 см и 12 см. Диагональ BD, равная 25 см, пересекает диагональ AC в точке E. Найдите BE.

В3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$ см, $BC = 9$ см. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и CD так, что $CK = 6$ см, $CE = 4$ см. Отрезок KE пересекает диагональ AC в точке P. Найдите отношение AP к PC.

Запишите решение задач С1 – С2.

С1. В треугольник ABC со сторонами $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см вписана окружность, касающаяся стороны AC в точке E. Найдите расстояние от точки E до точки K биссектрисы BK.

С2. В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K, $DK = 8$ см, $CK = 12$ см. Площадь треугольника AKD равна 24 см^2. Найдите площадь треугольника CBK.

III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту краткую запись решения задач контрольной работы или ответы итогового теста.

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

Ответы итоговой контрольной работы (№ 6):

Вариант 1

1. 48 $см^2$.
2. 40 см.
3. $18 + 3\sqrt{2}$ $см^2$.
4. 4 см и 12 см.
5. $8\sqrt{3}$ $см^2$.

Вариант 2

1. 60 $см^2$.
2. 20 $см^2$ и 24 $см^2$.
3. $27\sqrt{3}$ $см^2$.
4. 8 см и 15 см.
5. $8\sqrt{3}$ $см^2$.

Ключи к итоговому тесту № 6:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	C1	C2
1	2	4	1	3	2	192 см	12 см	7 : 1	$\frac{6}{13}$ см	72 $см^2$
2	4	3	2	1	3	54 см	10 см	2 : 1	$\frac{3}{8}$ см	54 $см^2$

Урок 70. Учебно-исследовательская конференция

Основные дидактические цели урока: совершенствовать творческие, исследовательские навыки обучающихся; совершенствовать навыки оценивания исследовательских работ.

Ход урока

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Учебно-исследовательская конференция

Заслушать проекты, подготовленные учащимися.

Жюри оценивает учебно-исследовательские работы, подводит итоги. В составе жюри могут быть учащиеся, приглашенные педагоги и родители.

III. Рефлексия учебной деятельности

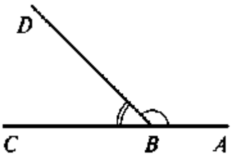
В конце урока жюри подводит итоги.

ПРИЛОЖЕНИЕ

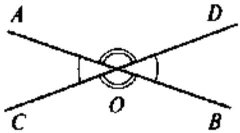
Обобщающие сведения

1. Параллельные прямые и углы

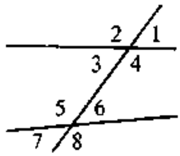
Углы, образованные при пересечении прямых



$\angle ABD$ и $\angle CBD$ – смежные;
$\angle ABD + \angle CBD = 180°$

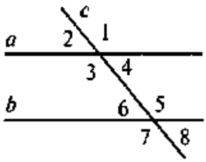


$\angle AOC$ и $\angle DOB$ – вертикальные;
$\angle AOD$ и $\angle BOC$ – вертикальные;
$\angle AOC = \angle DOB$;
$\angle AOD = \angle BOC$



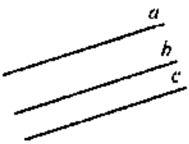
$\angle 1$ и $\angle 6$, $\angle 2$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – соответственные;
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – односторонние;
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ – накрест лежащие

Свойства параллельных прямых

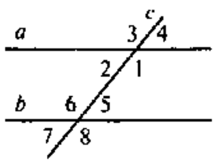


Если $a \parallel b$, c – их секущая, то:
1) $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ (соответственные углы равны);
2) $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ (накрест лежащие углы равны);
3) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ (сумма односторонних углов равна $180°$)

Признаки параллельности прямых



Если $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$

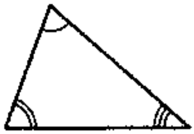
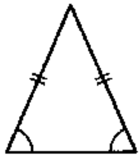
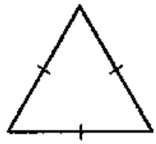
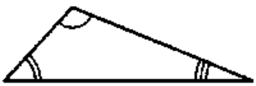
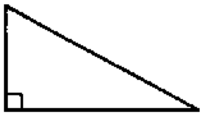
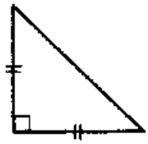


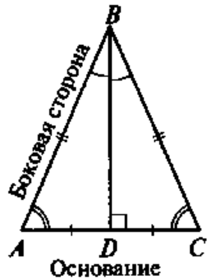
Если $a \cap c$, $b \cap c$ и
1) $\angle 1 = \angle 6$ ($\angle 2 = \angle 5$), то $a \parallel b$;
2) $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 8$), то $a \parallel b$;
3) $\angle 1 + \angle 5 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 6 = 180°$), то $a \parallel b$

Аксиома параллельности прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

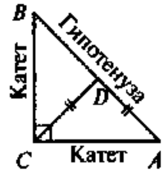
2. Треугольник

Треугольники	Разносторонние	Равнобедренные	Равносторонние
Остроугольные			
Тупоугольные			–
Прямоугольные			–



Свойства равнобедренного треугольника

1. $AB = BC$.
2. $\angle A = \angle C$.
3. BD – медиана, высота, биссектриса.



Свойства прямоугольного треугольника

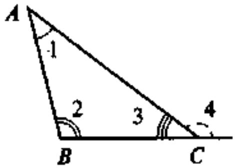
1. $\angle A + \angle B = 90°$;

2. Если $\angle B = 30°$, то $AC = \frac{1}{2}AB$

(если $\angle A = 30°$, то $BC = \frac{1}{2}AB$);

3. Если CD – медиана, то $CD = BD = AD$;

4. Если CD – медиана и $CD = BD = AD$, то ΔABC – прямоугольный.

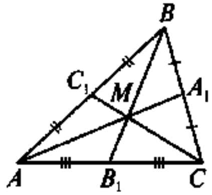


Соотношение между сторонами и углами треугольника

1. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$;
2. Если $\angle 1 < \angle 3 < \angle 2$, то $BC < AB < AC$;
3. $AB < BC + AC$, $BC < AB + AC$, $AC < AB + BC$;
4. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

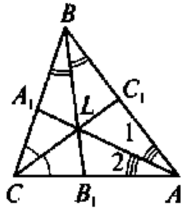
Медиана

AA_1 – медиана, если $BA_1 = CA_1$.



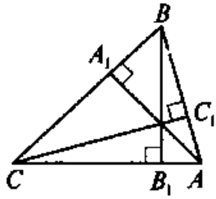
Биссектриса

AA_1 – биссектриса, если $\angle 1 = \angle 2$.

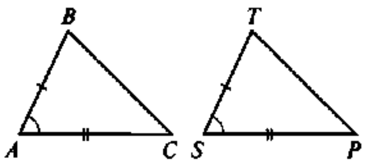
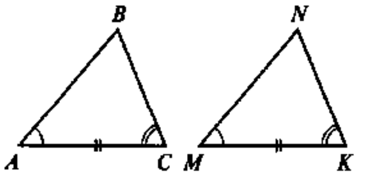
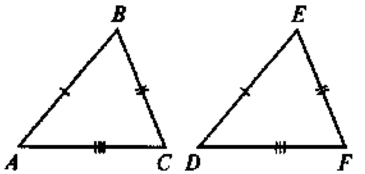


Высота

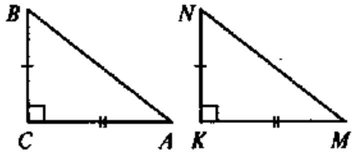
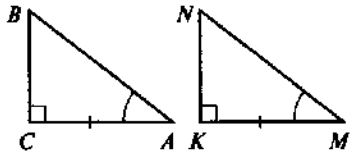
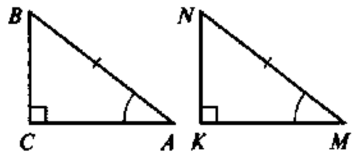
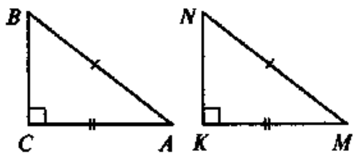
AA_1 – высота, если $AA_1 \perp BC$.



3. Признаки равенства треугольника

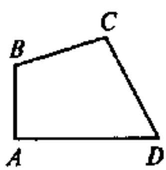
По двум сторонам и углу между ними		$\Delta ABC = \Delta STP$, если: 1. $AB = ST$; 2. $AC = SP$; 3. $\angle A = \angle S$
По стороне и двум прилежащим к ней углам		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если: 1. $AC = MK$; 2. $\angle A = \angle M$; 3. $\angle C = \angle K$
По трем сторонам		$\Delta ABC = \Delta DEF$, если: 1. $AB = DE$; 2. $BC = EF$; 3. $AC = DF$

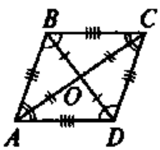
4. Признаки равенства прямоугольных треугольников

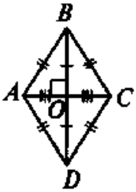
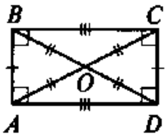
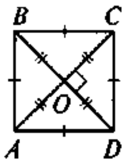
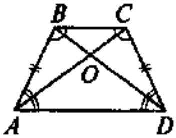
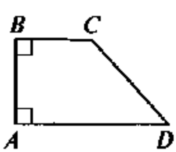
По двум катетам		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если: 1. $BC = NK$; 2. $AC = MK$
По катету и прилежащему к нему острому углу		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если: 1. $AC = MK$; 2. $\angle A = \angle M$
По гипотенузе и острому углу		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если: 1. $AB = MN$; 2. $\angle A = \angle M$
По гипотенузе и катету		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если: 1. $AB = MN$; 2. $AC = MK$

5. Четырехугольники

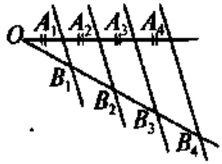
Выпуклый четырехугольник
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.



Определение	Свойства	Признаки
	Параллелограмм	
 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	1. $AO = CO$, $BO = DO$, $O = AC \cap BD$. 2. $AB = CD$, $BC = AD$. 3. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. 4. $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$	$ABCD$ – параллелограмм, если: 1. $AB = CD$, $AB \parallel CD$ или $BC = AD$, $BC \parallel AD$. 2. $AB = CD$ и $BC = AD$. 3. $AC \cap BD = O$, $AO = CO$, $BO = DO$

Определение	**Свойства**	**Признаки**
	Ромб	
 $ABCD$ – параллелограмм, $AB = BC = CD = DA$	1. $AC \perp BD$. 2. AC – биссектриса $\angle A$ и $\angle C$, BD – биссектриса $\angle B$ и $\angle D$. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма	$ABCD$ – ромб, если: 1. $ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD$. 2. $ABCD$ – параллелограмм и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. 3. $AB = BC = CD = DA$
	Прямоугольник	
 $ABCD$ – параллелограмм, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$	1. $AC = BD$. 2. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма	$ABCD$ – прямоугольник, если: 1. $ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$. 2. $ABCD$ – параллелограмм и $\angle A = 90°$ ($\angle B$, $\angle C$, $\angle D$). 3. $\angle A = \angle B = \angle C = 90°$
	Квадрат	
 $ABCD$ – прямоугольник, $AB = BC = CD = DA$	Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника	$ABCD$ – квадрат, если: 1. $ABCD$ – прямоугольник и $AC \perp BD$. 2. $ABCD$ – ромб и $AC = BD$. 3. $ABCD$ – ромб и $\angle A = 90°$. 4. $ABCD$ – прямоугольник и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$
	Трапеция	
 $BC \parallel AD$, AB не параллельна CD. $MN = 0{,}5(BC + AD)$. $\Delta AOD \sim \Delta COB$	Равнобокая трапеция: $AC = BD$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ Прямоугольная трапеция: $\angle A = \angle D = 90°$, $\angle C$ – тупой, $\angle D$ – острый	 

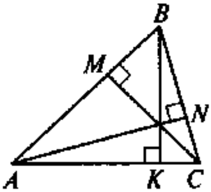
Теорема Фалеса



Если $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

6. Площади фигур

Площадь треугольника



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin C.$$

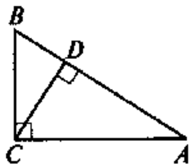
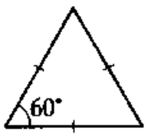
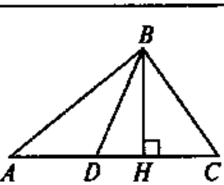
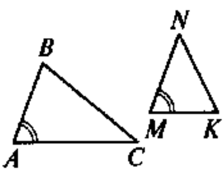
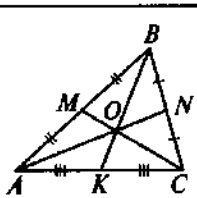
Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

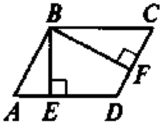
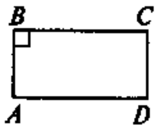
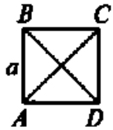
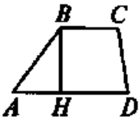
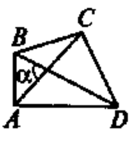
где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC)$.

$S = rp$, где r – радиус вписанной окружности.

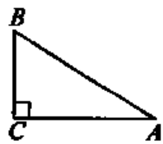
$S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$, $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ 	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 
$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DC}$ 	$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$ 
$S_{AOM} = S_{BOM} = S_{BON} = S_{CON} = S_{AOK} = S_{COK}$ 	

Площади четырехугольников

Параллелограмм		$S = AD \cdot BE = CD \cdot BF$. $S = AB \cdot AD \cdot \sin A = BA \cdot BC \cdot \sin B$
Прямоугольник		$S = AB \cdot BC$
Ромб		$S = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD$. $S = AB^2 \cdot \sin A = AB^2 \cdot \sin B$. $S = AB \cdot AH$
Квадрат		$AC = d$. $S = a^2$. $S = 0{,}5 \cdot d^2$
Трапеция		$S = 0{,}5 \cdot BH \cdot (BC + AD)$
Выпуклый четырехугольник		$S = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$

Теорема Пифагора



$AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Если $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то ΔABC – прямоугольный.

7. Подобные треугольники

Определение

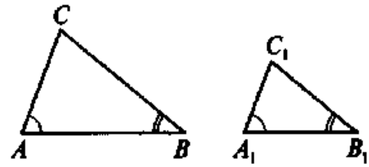
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k; \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{{A_1B_1}^2} = k^2.$$

Признаки подобия треугольников

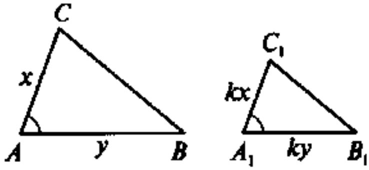
I признак

Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



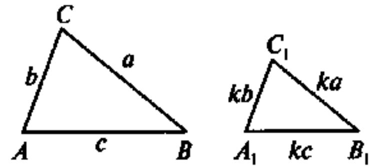
II признак

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$, $\angle A = \angle A_1$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



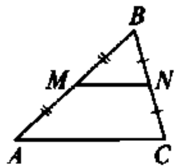
III признак

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

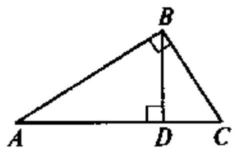


Применение подобия

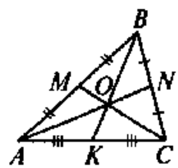
MN – средняя линия треугольника.
$MN \parallel AC$, $MN = 0{,}5AC$.



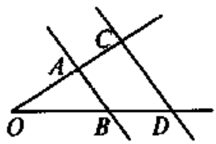
$BD = \sqrt{AD \cdot DC}$.
$AB = \sqrt{AD \cdot AC}$.
$BC = \sqrt{CD \cdot AC}$.
$\Delta ABD \sim \Delta BCD \sim \Delta ACB$.



$AN \cap BK \cap CM = O$.
$\dfrac{AO}{NO} = \dfrac{BO}{KO} = \dfrac{CO}{MO} = \dfrac{2}{1}$



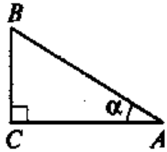
Если $AB \parallel CD$, то $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$.



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

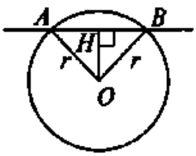
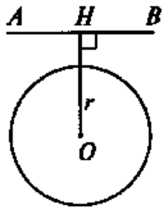
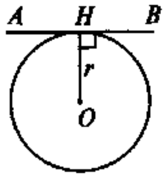
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

8. Окружность

Взаимное расположение прямой и окружности

 AB – секущая, если $OH < r$	 AB не пересекается с окружностью, если $OH > r$	 AB – касательная, если $OH = r$

Свойство касательной

$AB \perp OH$ (OH – радиус, проведенный в точку касания H).

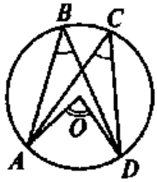
Признак касательной

Если $AB \perp OH$, то AB – касательная.

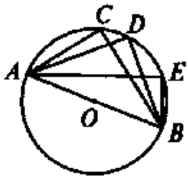
Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки

$AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$.

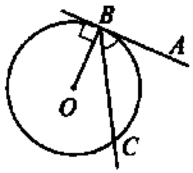
Углы в окружности



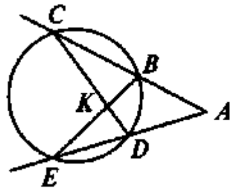
$\angle AOD$ – центральный.
$\angle AOD = \cup AD$
$\angle ABD$, $\angle ACD$ – вписанные
$\angle ABD = \angle ACD = 0{,}5 \cup AD$



$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$

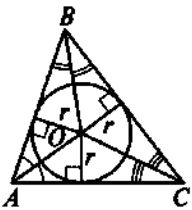


$\angle ABC = 0{,}5 \cup BC$

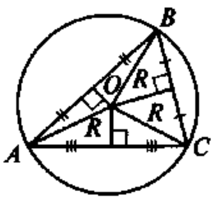


$\angle CAE = 0{,}5\ (\cup CE - \cup BD)$.
$\angle CKE = 0{,}5(\cup CE + \cup BD)$

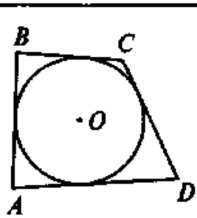
Вписанная и описанная окружности



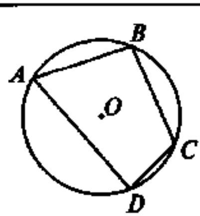
O – точка пересечения биссектрис



O – точка пересечения серединных перпендикуляров

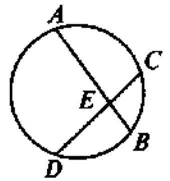


$AB + CD = BC + AD$

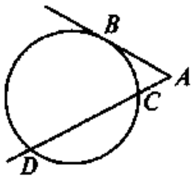


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 90°$

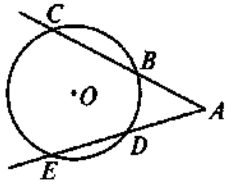
Свойства отрезков хорд, секущих и касательных



$AE \cdot BE = CE \cdot DE$

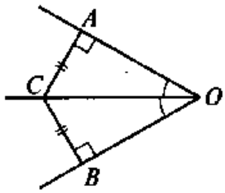


$AB^2 = AC \cdot AD$



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

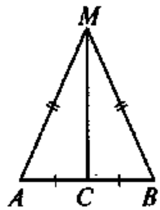
Свойства биссектрисы угла



1. Если OC – биссектриса угла O, то $AC = BC$.

2. Если $AC = BC$, то OC – биссектриса угла O.

Свойства серединного перпендикуляра к отрезку



1. Если MC – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $MA = MB$.

2. Если $MA = MB$, то M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Содержание

ГЛАВА VII. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

ГЛАВА VIII. ОКРУЖНОСТЬ

Учебно-методическое издание

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Гаврилова Нина Федоровна

**ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ
ПО ГЕОМЕТРИИ**

к УМК Л.С. Атанасяна и др.
(*М.: Просвещение*)

8 класс

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки и верстка *Дмитрия Сахарова*

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано в печать 15.09.2016.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 21,84. Тираж 7000 экз. Заказ №0953.

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7-915-222-15-42, +7-926-063-81-80.